# Huiswerkset 4 van Lineaire Algebra II 2012

Ron Hoogwater Gosse Overal

12 december 2012

Bedankt voor het inleveren in LaTeX, dit maakt het werk voor ons erg prettig. Ook dank aan de mensen die hun huiswerk de juiste naamgeving gaven per e-mail, dat zorgde voor een gealfabetiseerde stapel die geprint werd, wat ons veel tijd scheelde met het invoeren van de cijfers. In dit document geven we wat feedback op al het werk. Haal hier je voordeel uit!

### Algemene opmerkingen

De huiswerkset is erg goed gemaakt.

Vertalingen waren vaak slecht, hieronder correcte vertalingen van Engels naar Nederlands:

- "Theorem" is "Stelling".
- "Hermitian" is "Hermitisch"
- "inner product" is "inproduct"
- "Positive definite" is "Positief definiet".

Probeer een balans te zoeken in de hoeveelheid referenties.
Bijvoorbeeld: Als de determinant van een matrix niet nul is, volgt inverteerbaarheid en dat de rang gelijk is aan de dimensie van de ruimte. Hier hoef je niet meer voor te verwijzen naar het LA1 dictaat, dit veronderstellen we als bekend. Als je gebruikt dat de signatuur het aantal positieve eigenwaarden is minus het aantal negatieve eigenwaarden is, dan is er wel een referentie of bewijs nodig.

### Cijfer

Het totaal aantal punten $x$ geeft je cijfer via de volgende formule:

$$\text{Cijfer } = 1 + \tfrac{1}{2} \cdot x$$

Wij hebben ons best gedaan om alle $\pm$ 100 huiswerksets zo eerlijk mogelijk te beoordelen en onze beoordeling te beargumenteren. Mocht je het gevoel hebben dat je onrecht is aangedaan, begin dan nu alvast met het plannen van je wraak in de vorm van een uitgebreid complot als kwaadaardige genie door *binnen een week* een e-mail te sturen naar `goveral@math.leidenuniv.nl` waarin je uiteenzet waarom jij gelijk hebt, of kom langs met het werkcollege.

## Specifieke opmerkingen

### Opgave H4.1 (6 punten)

1. Om te bewijzen dat een algemene eigenschap niet geldt is het voldoende een tegenvoorbeeld te verzinnen:

   **Te Bewijzen:** $\phi$ is niet sesquilineair.

   *Bewijs.* $\phi((1,1), i \cdot (1,1)) = \phi((1,1),(i,i)) = 2i$,
   $\bar{i}\phi((1,1),(1,1)) = -i\phi((1,1),(1,1)) = -2i$.
   $2i \neq -2i$, dus $\phi$ is niet sesquilineair. $\square$

2. Dit is een typische opgave die je oplost door maar wat te proberen. Opschrijven dat geldt $\phi((1, \frac{1}{2}), (1, \frac{1}{2})) = 1$ en daaruit vergelijkingen oplossen voor de andere basisvector is genoeg.

De deelopgaven waren allebei 3 punten waard.

## Opgave H4.2 (4 punten)

Dit was een snelle oefening in Gram-Smidt orthonormalisatie toepassen. Stelling 9.6 volgen leverde het goede antwoord. Controleer altijd op rekenfouten, sommige mensen eindigden met twee lineair afhankelijke vectoren door rekenfouten, dit hadden ze gewoon moeten kunnen zien en corrigeren.

Als je stelling 9.6 goed toepast volgt uit de stelling dat het een orthonormale basis oplevert, dan hoef je dat niet meer te bewijzen. Wel moeten alle voorwaarden bewezen worden, dus dat de startvectoren in $V$ zitten en dat ze lineair onafhankelijk zijn.

Bij sommige stond het volgende teken, dit betekent:

**A** Mocht je toevallig vectoren kiezen die al orthonormaal zijn is het overdreven om Gram-Smidt orthonormalisatie toe te passen. Normaliseren is genoeg.

## Opgave H4.3 (8 punten)

Hier moest voor twee matrices drie vragen worden beantwoord.

1. Dit ging goed.

2. Als stelling 8.27 gebruikt werd zonder verwijzing leverde dit éénmalig een punt aftrek. Merk hierbij wel op dat de stelling geeft dat positief definiet alleen volgt als <u>alle</u> linksbovenmatrices determinant groter dan 0 hebben.

3. Als $A$ congruent is met $B$ zijn de tekens van de determinanten hetzelfde. Dit is zelf te bewijzen en dat bewijs was nodig. Als dit bewijs miste werd een punt afgetrokken.

   **B** Sommige mensen hebben het teken van de eigenwaarden gebruikt om de signatuur te bepalen. Dit kan, maar dan moet je eerst bewijzen dat dit mogelijk is. Dat betekent dat je bewijst dat een symmetrische matrix orthogonaal diagonaliseerbaar is. Dat kan, maar is niet eenvoudig te bewijzen. Gebruik zonder bewijs leverde twee punten aftrek op.

De makkelijkste oplossing ging als volgt.

- Bewijs dat het teken van de determinant gelijk van congruente matrices. Dus $r + s = 3$, want anders is de determinant 0 en dan volgt dat $s = 2$ of $s = 0$, want anders is de determinant kleiner dan 0
- Voor de eerste matrix: Omdat deze niet positief definiet is, volgt dat de congruente diagonaalvorm ook niet positief definiet is, dus $r = 1, s = 2$, de signatuur is $-1$.
- Voor de tweede matrix: Omdat

  $$(1,-1,1)\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\end{pmatrix} = (1,-1,1)\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix} = -1$$

  $$(1,0,0)\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix} = (1,0,0)\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix} = 1$$

  volgt er dat $s \geq 1$ en $r \geq 1$. Er volgt $s = 1, r = 2$, anders is de determinant kleiner of gelijk aan 0. Dus de signatuur is 1.