Huiswerkset 1 van Lineaire Algebra II 2012

Ron Hoogwater   Gosse Overal

4 oktober 2012

Bedankt voor het inleveren in LaTeX, dit maakt het werk voor ons erg prettig. In dit document geven we wat feedback op al het werk. Haal hier je voordeel uit!

Inleveren

Vanwege het overweldigende aantal studenten blijkt dat we wat zaken iets strakker moeten regelen omdat dit ons veel tijd gaat besparen. Het uitprinten van meer dan 50 huiswerksets en het invoeren van meer dan 100 cijfers en namen is namelijk wel even werk.

Als je het huiswerk via de e-mail inlevert, stuur dit dan in `pdf`-formaat naar precies een e-mailadres: `goveral@math.leidenuniv.nl`. Begin de bestandsnaam met je achternaam in kleine letters, bijvoorbeeld `hoogwater-hw2.pdf`, maar ook `overal-succes-ermee.pdf` is prima.

Lever je het op papier in, dan graag ook in maximaal een postvakje of in het werkcollege, en alstjeblieft *een nietje*. Het niet-apparaat staat in de commonroom op de tweede verdieping naast het kopieerapparaat.

Verder is het nakijken makkelijker als jullie ons ruimte geven om commentaar op te schrijven: gebruik dus de standaardmarges van LaTeX.

LaTeX

Het is heel fijn dat alles in LaTeX is ingeleverd, en ik geef graag een paar tips voor het verbeteren van ieders LaTeX-skills!

Ten eerste: gebruik de standaardmarges van LaTeX. Als bovenaan je document staat `\documentclass[a4paper]{article}` dan maakt LaTeX marges die zorgen voor prettig leesbare regels en genoeg ruimte om commentaar bij te schrijven.

Lange regels lezen namelijk onprettig zoals je ziet omdat de volgende regel moeilijk te vinden is en zinnen worden afgebroken: dit is erg vervelend.

Packages als `geometry` zijn vaak onnodig (in een uitzonderlijk geval kan je `\usepackage[a4paper]{geometry}` overwegen) en de package `savetrees` of commando's als `\setlength` en `\addtolength` zijn uit den boze!

Ten tweede: gebruik alinea's en hele zinnen. Om een nieuwe alinea te beginnen gebruik je een witregel, commando's als `\\` en `\newline` zijn onnodig in stuk tekst en maken de tekst slechter leesbaar. Elke zin hoort een werkwoord te hebben en elk stukje wiskunde hoort in een zin.

Zet *alle* wiskunde in mathmode! Ik zag regelmatig dingen als de tekst 'een nxn matrix A', dit moet zijn: 'een $n \times n$ matrix A'. In de code gebruik je dollartekens: `een $n \times n$ matrix $A$`. Als je een belangrijke of lange vergelijking hebt dan zet je deze in een equation-environment met `\begin{equation}` en `\end{equation}`, dan wordt de vergelijking gecentreerd op een nieuwe regel en hoeft de lezer niet zo te turen.

Als je commando's of goede TeX-gewoontes wil weten, dan raad ik als naslagwerk *The Not So Short Introduction to LaTeX 2ε* aan. Zoek in google op `lshort` en het is de eerste pdf. De wikibook over LaTeX is ook een aanrader. Het tool `detexify` is ook een aanrader (ook te vinden via google).

Algemene opmerkingen

Samenwerken mag, maar je maakt je eigen uitwerkingen en schrijft je eigen TeX-code. De uitwerking op papier krijgen is minstens zo belangrijk als het vinden van het antwoord. Je oefent hier het kunnen opschrijven van een wiskundige redenering, maak gebruik van het feit dat je hier feedback op krijgt! Als we stukken TeX-code in meerdere huiswerksets terugvinden, dan delen we vanaf nu het cijfer door het aantal huiswerksets met die code.

Een uitwerking is een stuk tekst, leg dus uit wat je doet en welke symbolen je gebruikt. Schrijf in plaats van $\mathrm{mm}(A) = 2$ alles uit in zinnen: 'de meetkundige multipliciteit is $\mathrm{mm}(A) = 2$'. Dit voorkomt dat je notatie gebruikt die wij niet kennen, en zorgt dat je alles in nette zinnen opschrijft. Het gebruik van een `equation`-environment in een zin raad ik erg aan, dit maakt de tekst nog leesbaarder.

Verder zagen we nog wat slordige notatie: schrijf $f(t) = e^t$ en niet $f = e^t$, gebruik $(AB)^n$ of $A\,B^n$ en vermijd AB^n.

Als je bij bepaalde uitspraken geen referentie geeft naar het dictaat of andere boeken, dan kan je ons redenen geven om punten af te trekken. Een voorbeeld: voor een nilpotente matrix A zijn zinnen als 'we weten dat $\det A = 0$' of 'we weten dat de eigenwaarden van A nul zijn' gevaarlijk, geef een referentie naar de stelling!

Opgave H1.1 (4 punten)

Deze opgave kon het minimumpolynoom of de eigenwaarden gebruikt worden. Het geval in $\mathbb{R}$ leverde 2 punten op, het geval in $\mathbb{C}$ ook. Bij een benadering met eigenwaarden was essentieel inzicht dat een matrix diagonaliseerbaar is precies als de eigenruimten heel $\mathbb{R}^2$ opspannen. Voor het geval in $\mathbb{R}$ hebben we de opmerking dat een 2×2 matrix met twee verschillende eigenwaarden diagonaliseerbaar is goed gerekend, maar volgende keer graag een referentie geven, bijvoorbeeld naar Cor 9.17 van het dictaat van Ronald van Luijk voor LA1 (te vinden op de website). Alleen de opmerking dat het karakteristiek polynoom twee verschillende wortels heeft vonden we niet genoeg (1 punt aftrek), een referentie naar Propositie 9.18 was dan vereist. Dat een matrix met een eigenwaarde niet diagonaliseerbaar is, is niet waar hebben we fout gerekend. Bij een redenering met het minimumpolynoom moet worden beargumenteerd waarom het minimumpolynoom in zowel $\mathbb{R}$ als $\mathbb{C}$ gelijk is aan het karakteristiek polynoom, anders kost dat een punt.

Opgave H1.2 (6 punten)

Lees de vraag goed! Als er een basis wordt gevraagd dan moet je die expliciet geven (1 punt). We kwamen veel rare notaties voor een basis tegen, waaronder matrices. Onthoud: een basis is een *verzameling* van linear onafhankelijke vectoren, dus noteer dit als zodanig. Berekening van eigenwaarden en eigenvectoren ging over het algemeen goed (1 punt).

Het bewijzen van $h' = \lambda h$ was 2 punten waard. Als je opmerkt dat

$$h' = \begin{pmatrix} f' & g' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

(let op dat de matrixvermenigvuldiging werkt) en alle gegevens gebruikt dan kan het in een regel, zonder getallen. Regelmatig werd dit bewezen door alles met getallen uit te schrijven; dit hebben we goed gerekend mits dit voor beide eigenwaarden is gedaan.

De algemene oplossing van het stelsel van differentiaalvergelijkingen was 2 punten waard. De oplossing was

$$f(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t}$$
$$g(t) = 3c_1 e^t + 2c_2 e^{2t}$$

voor $c_1 c_2 \in \mathbb{R}$ willekeurig. Vaak werden de integratieconstanten vergeten of werd er een oplossing gegeven waarbij een van de constanten nul was, dit kost je een punt resp. alle punten.

Opgave 1.3 (4 punten)

Het vinden van een waarde voor a leverde 2 punten op en een bewijs dat de matrix voor deze a nilpotent was ook. Let hierbij op wat het verschil is tussen een voldoende en vereiste voorwaarde. Dat de trace nul is, is vereist maar niet voldoende voor een nilpotente matrix. In dat geval moet je bewijzen of berekenen dat A_a voor de gevonden a nilpontent is. Bij een berekening moet minstens A_a^2 worden gegeven. Bewijzen miste vaak referenties naar de juiste stellingen, dit hebben we door de vingers gezien als de stelling expliciet werd geponeerd als waar.

Opgave 1.4 (6 punten)

Bewijzen waren erg slordig. Bedenk je dat je ons moet overtuigen in de Nederlandse of Engelse taal; gebruik dus hele zinnen en geef alle argumenten. Wat zijn A en B, wat is n? Als je letters niet declareert geef je ons reden om minder snel punten toe te kennen. Voorbeeld: de uitspraak $A^n = 0$ is zinloos als je niet zegt wat n is. Is n dan het getal getal uit de definitie van nilpotent omdat A in de vraagstelling een nilpotente matrix is, of is n de grootte van de matrix en gebruik je zowel Cor 3.6 als Cayley Hamilton (of de opgave van het werkcollege). Hier kunnen we niet zien wat je wel of niet begrepen of gebruikt hebt. In elke deelopgave waren 2 punten te verdienen.

1. Vereist waren twee matrices A en B met een bewijs of opmerking waarom deze nilpotent waren (1 punt) en een bewijs of berekening waarom AB nilpotent is (1 punt). Vergeet de haakjes niet als je $(AB)^2$ schrijft.

2. Als je zegt dat $(AB)^k = A^k B^k$ dan gebruik je de commutativiteit, dit moet je expliciet zeggen, anders kost dit een punt.

3. Deze opgave werd vaak gedaan met determinanten. Voor een nilpotente matrix A geldt inderdaad dat $\det A = 0$, maar dit heeft een bewijs of referentie nodig (1 punt). Voor matrices A en B geldt $\det(A)\det(B) = \det(AB)$; hier hebben we geen referentie naar een stelling vereist, maar wel een zin die duidelijk maakt dat je dit gebruikt en dat dit niet triviaal is (1 punt). Een andere geldige redenering gaat met nulruimtes. Aan de blokvorm van de corresponderende matrix kan worden gezien dat iedere nilpotente afbeelding een niet-triviale kern heeft, dus de samenstelling van deze afbeeldingen heeft ook een niet-triviale kern en is daarmee niet inverteerbaar.

Je cijfer krijg je door het aantal punten te delen door 2. Wij hebben ons best gedaan om alle 107 huiswerksets zo eerlijk mogelijk te beoordelen en onze beoordeling te beargumenteren. Mocht je het gevoel hebben dat je onrecht is aangedaan, begin dan nu alvast met het plannen van je wraak in de vorm van een uitgebreid complot als kwaadaardige genie door *binnen een week* een e-mail te sturen naar `goveral@math.leidenuniv.nl` waarin je uiteenzet waarom jij gelijk hebt, of door *na* het werkcollege bij ons langs te komen.