Huiswerkset 2 van Lineaire Algebra II 2012

Ron Hoogwater Gosse Overal

24 oktober 2012

Bedankt voor het inleveren in LaTeX, dit maakt het werk voor ons erg prettig. Ook dank aan alle mensen die hun marges hebben aangepast om het leesbaarder voor ons te maken en ruimte te creëren voor onze aantekeningen. In dit document geven we wat feedback op al het werk. Haal hier je voordeel uit!

Inleveren

Om ons veel werk te besparen vragen we nogmaals het volgende format te volgen als je jouw huiswerk *per e-mail* inlevert.

Stuur dit in `pdf`-formaat naar precies één e-mailadres:
`gollm@math.leidenuniv.nl`.
Begin de bestandsnaam met je achternaam in kleine letters, bijvoorbeeld `hoogwater-hw2.pdf`, maar ook `overal-succes-ermee.pdf` is prima.

LaTeX

Alle tips van vorige keer blijven interessant. Mocht er in een marge staan dat deze te klein is, wederom: gebruik de standaardmarges van LaTeX.
Zet bovenaan je document `\documentclass[a4paper]{article}`.

Algemene opmerkingen

Samenwerken mag, maar je maakt je eigen uitwerkingen en schrijft je eigen TeX-code. Wanneer we stukken TeX-code in meerdere huiswerksets hebben teruggevonden, hebben we het cijfer gedeeld door het aantal huiswerksets met die code.

Bij opgaves 1 en 2 was het erg belangrijk hoe het opgeschreven werd. De structuur van een bewijs was soms ver te zoeken, wat ertoe leidde dat er misschien alle goede ideeën stonden, maar er toch punten werden afgetrokken, omdat het bewijs onjuist was, of omdat delen van het bewijs werden overgeslagen.

Gebruik je een nieuw symbool, definieer dan wat het betekent. Is U_i een deelruimte, waar komt dan de teller i vandaan? Zet bijvoorbeeld $i \in \{1, \dots, n\}$ erbij.

Als je wel naar een stelling of lemma verwijst, zorg dan dat je bewezen hebt dat de voorwaarden ervan zijn voldaan. Bijvoorbeeld, voor het gebruik van Propositie 4.7 moet bewezen worden dat de verschillende $p_i(x)$ die je definieert copriem zijn en dat $p(f) = 0$ geldt.

Vermijd vormen van 'moeten' in je argumentatie, omdat er dan onduidelijk is of je iets te bewijzen of een gevolg bedoelt, gebruik liever respectievelijk woorden als 'we willen'/'Te bewijzen is:' of 'dan volgt'/'Nu geldt dat:'.

Bijvoorbeeld: "V moet een n-dimensionale ruimte zijn.", bedoel je dan: "We willen bewijzen dat V een n-dimensionale vectorruimte is." of (Bijvoorbeeld gegeven dat W een vectorruimte is met $v_1, \ldots, v_n \in W$, lineair onafhankelijk, $V := \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$.) "Nu volgt dat V een n-dimensionale vectorruimte is"?

Sommige mensen gebruikten verzamelingen als $V \setminus \ker(f)$ en hadden het over de dimensie daarvan. *Dit kan niet.* Het is geen vectorruimte, alleen al omdat de nulvector er niet in zit, dus zo'n verzameling gebruiken leverde meestal al snel een grote fout op.

Cijfer

Het totaal aantal punten x geeft je cijfer via de volgende formule:

$$\text{Cijfer } = 1 + \frac{9}{16} \cdot x$$

Dus de volgende cijfers zijn uitgereikt, voor het totaal aantal punten x:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Cijfer	1.6	2.1	2.7	3.3	3.8	4.4	4.9	5.5	6.1	6.6	7.2	7.8	8.3	8.9	9.4	10.0

Wij hebben ons best gedaan om alle ± 100 huiswerksets zo eerlijk mogelijk te beoordelen en onze beoordeling te beargumenteren. Mocht je het gevoel hebben dat je onrecht is aangedaan, begin dan nu alvast met het plannen van je wraak in de vorm van een uitgebreid complot als kwaadaardige genie door *binnen een week* een e-mail te sturen naar `goveral@math.leidenuniv.nl` waarin je uiteenzet waarom jij gelijk hebt, of kom langs met het werkcollege.

Specifieke opmerkingen

Opgave H2.1 (4 punten)

De vraag is, bewijs met het gegeven dat V n-dimensionaal is en f n verschillende eigenwaarden heeft, dat V precies 2^n verschillende f-invariante eigenruimten heeft.

Dit bestaat uit 2 delen:

- Construeer deze ruimten, laat zien dat het er 2^n zijn en bewijs dat ze f-invariant zijn.
- Bewijs dat er niet nog meer f-inv. deelruimten zijn.

De eerste stap ging iedereen vrij gemakkelijk af bijvoorbeeld met stelling 5.2 uit het dictaat en combinaties nemen.

De tweede stap werd bijna altijd vergeten en anders werd gezegd dat het bewezen was zonder een juist bewijs. Een methode was door het secuur toepassen van Propositie 4.7 met U een willekeurige invariante deelruimte, $f = f|_U$ en $p(x) = P_f(x)$. Slordigheid resulteerde vaak in een incorrect bewijs.

Opgave H2.2 (4 punten)

Dit is voorgedaan op werkcollege.

Kort samengevat: het is erg belangrijk om je bewijs te structureren. Geef aan wat je precies gaat bewijzen en waarom dat voldoende is. Als iets een gevolg is, geef dan aan waarom het een gevolg is en uit welke gegevens dit gevolg volgt.

Veel punten aftrek waren voor incomplete bewijzen. Vaak werd vergeten om beiden implicaties te bewijzen.

Opgave H2.3 (4 punten)

Een tip om veel tijd te besparen op het tentamen:
Veel mensen hebben absurd veel te veel werk gedaan. Zij berekenden de hele basistransformatie die de JNV gaf. Wegens alle theorie die er over JNV bekend is en op het college is behandeld is het, voor een matrix met reële eigenwaarden, *altijd* genoeg om te kijken naar de dimensies van $\ker\left((A - \lambda I)^i\right)$, met $i = 0, 1, 2, \ldots$ en λ de eigenwaarde. De verschillen geven met het trucje van de Smit altijd precies hoe groot de blokken zijn bij deze specifieke eigenwaarde.

Deze opgave was nog eenvoudiger, dit kwam doordat de matrix diagonaliseerbaar was. De diagonaalvorm is dan ook de JNV. Dat laatste was bewezen op college. Om te bewijzen dat de matrix diagonaliseerbaar was, was het enkel nodig om aan te tonen dat de eigenwaarde $\lambda = 0$, algebraïsche multipliciteit gelijk aan de meetkundige multipliciteit had. Hieruit volgde dan direct dat er een eigenbasis was, dus dat JNV uit blokken van 1×1 bestond. De JNV J was (bijvoorbeeld, volgorde van blokken daargelaten)

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Opgave H2.4 (4 punten)

Let op, gevolg 5.4 geeft aan dat een diagonaliseerbaar endomorfisme d en een nilpotent endormorfisme n bestaan zodat $f = d + n$ en $d \circ n = n \circ d$, nog zonder gegeven basis van V. Hier wilde je dus naar op zoek, want dan geldt $e^A = e^D e^N$, met de hoofdletters voor de bijbehorende matrix op deze basis.
Dit werd vaak op minstens 1 van de volgende manieren verkeerd geïnterpreteerd:

- d is diagonaliseerbaar, dus er is een basis, zodat dit endomorfisme in een diagonaalvorm geschreven kan worden. *Dit hoeft niet de basis te zijn waarop A is geschreven.* Dus als je $A = D + N$ wilt gebruiken met D een diagonaliseerbare matrix en N een nilpotente matrix, dan staat D over het algemeen genomen niet in diagonaalvorm. Echter omdat de diagonaalvorm een scalaire matrix is, volgt direct dat D dat ook is: $D = P \cdot 2Id \cdot P^{-1} = 2P \cdot P^{-1} = 2Id$.

- Als A toevallig gelijk is aan een diagonaalmatrix plus een nilpontente matrix die je toevallig zag, dan volgt *niet* uit dit gevolg dat ze dan moeten commuteren, dit moet je dan nog bewijzen.

- $e^A = e^{d+n} = e^d e^n$ gaat enkel op als d en n commuteren.

(! op de set geeft aan dat het bovenstaande bij jou zeker van toepassing is.)

Dit waren echter subtiele fouten, dus er zijn altijd weinig of geen punten voor afgetrokken als het fout was.

De meeste mensen vonden de goede matrices en hebben uiteindelijk de goede e^A berekend.