Proeftentamen Lineaire algebra 1 NA — Antwoorden

Antwoord 1.

(a) De rang van A_1 vinden we door te vegen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De rang is het aantal pivots, ofwel het aantal rijen dat niet nul is, en dat is hier 2.

(b) De inverse van A_2 vinden we door de 3×3 identiteitsmatrix naast A te zetten en te vegen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/6 & -2/3 & -1/6 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

dus $A_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -1/6 & -2/3 & -1/6 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$.

(c) Bereken de determinant van A_x:

$$\det(A_x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & -x & -1 \\ -1 & 2 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & -x & -1 \\ 0 & 2 & 2x \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} -x & -1 \\ 2 & 2x \end{vmatrix} = -2x^2 + 2 = -2(x-1)(x+1)$$

Nu is A_x inverteerbaar precies als $\det(A_x)$ niet nul is, dus precies dan als x niet 1 of -1 is.

Antwoord 2. Laat L de lijn zijn in $\mathbb{R}^3$ door de oorsprong en het punt $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. De afbeelding T: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ is de rotatie om L over 180 graden.

(a) Eigenwaarden: 1 en -1. Eigenruimte bij 1: de rotatie-as, dwz span(n) met $n = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Eigenruimte bij -1: het vlak loodrecht op deze as, gegeven door de vergelijking $x + 2y + z = 0$, of bijvoorbeeld als ruimte opgespannen door $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(b) Dit kan op twee manieren. Om te beginnen kunnen we $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ en $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ nemen, en de gevraagde matrix A voldoet dan aan $AC = CD$, dus $A = CDC^{-1}$. De inverse van C is

$$\begin{pmatrix} 1/6 & 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 & -5/6 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

en we vinden dan

$$A = \begin{pmatrix} -2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

Tweede methode: de projectie $p(x)$ van een punt x op L is $p(x) = \frac{x \cdot n}{n \cdot n} n$. Het punt $T(x)$ is zo dat $p(x)$ midden tussen x en $T(x)$ ligt, dus $p(x) = (x + T(x))/2$, ofwel $T(x) = 2p(x) - x = 2\frac{x \cdot n}{n \cdot n} n - x$. Voor $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ vinden we $T(x) = 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$, en dat geeft de eerste kolom van A. De andere twee vinden we door hetzelfde te doen met $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Antwoord 3. Een vector p op de eerste lijn, en q op de tweede lijn zijn van de vorm

$$p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad q = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad p - q = \begin{pmatrix} -a+b \\ a-2 \\ -b+1 \end{pmatrix}$$

met $a, b \in \mathbb{R}$. Voor de punten p, q waarvoor de afstand tussen p en q de afstand tussen de twee lijnen is, staat de lijn door p en q loodrecht op de twee gegeven lijnen dus

$$\begin{pmatrix} -a+b \\ a-2 \\ -b+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{pmatrix} -a+b \\ a-2 \\ -b+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

Dit geeft

$$\begin{aligned} -2a + b + 2 &= 0 \\ -a + 2b - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Oplossing (vegen): $a = 5/3$ en $b = 4/3$. De verschil-vector $p - q$ is dus $\begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$, en de afstand is $\frac{1}{3}\sqrt{3}$.

Antwoord 4. Veeg de matrix met rijoperaties:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Basis voor de kern: $\begin{pmatrix} -3/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -12 \\ 3/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(b) Een basis is te krijgen door de kolommen te selecteren van de oorspronkelijke matrix waar pivots in de geveegde matrix komen: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Antwoord 5. Veeg de matrix, en ontwikkel naar kolommen:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$
$$-2 \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot ((-1) \cdot (-1) - 1 \cdot (-2)) = 6$$

Antwoord 6.

(a) Het karakteristiek polynoom is

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda + 1 & 4 \\ 2 & -\lambda + 3 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda - 5 = (\lambda - 5)(\lambda + 1)$$

dus de eigenwaarden zijn -1 en 5. De eigenruimte bij 1 is

$$E_1 = \ker \left(A - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right) = \ker \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \operatorname{span} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

en de eigenruimte by 5 is

$$E_5 = \ker \left(A - \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \right) = \ker \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \operatorname{span} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Laat $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, dan is $AC = C \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, dus als $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ dan is $\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = C^{-1} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C^{-1} A C \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u \\ 5v \end{pmatrix}$. We zien dat $u = c_1 e^{-t}$, $v = c_2 e^{5t}$ en

$$x = 2u + v = 2c_1 e^{-t} + c_2 e^{5t}$$
$$y = -u + v = -c_1 e^{-t} + c_2 e^{5t}$$