Tentamen lineaire algebra 2
17 januari 2014, 10:00 – 13:00
zalen 174, 312, 412, 401, 402

Dit zijn geen complete uitwerkingen. Er is dus geen garantie dat het "overschrijven" met andere getallen voldoende is voor huiswerk of tentamens.

Er is ook een bestand met alleen de opgaven. Lees de oplossing pas na het doen van een serieuze poging.

Dit is *geen* openboektentamen. Alleen niet-programmeerbare rekenmachines zijn toegestaan. Bewijs je antwoorden.

Opgave 1. Beschouw de reële matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

(a) Bepaal de Jordannormaalvorm van A, inclusief de bijbehorende basistransformatie.

(b) Vind een diagonaliseerbare matrix D en een nilpotente matrix N zodat $B = D + N$ en $ND = DN$.

(c) Bepaal B^{2014}.

Oplossing.
(a) Er wordt gevraagd om J en Q met $Q^{-1}AQ = J$ waarbij J in Jordannormaalvorm staat. Op de webpagina staat hoe je dit kan uitrekenen, en veel voorbeelden. **Er wordt expliciet in de opgave gevraagd om ook de basistransformatie Q te geven.** Eventueel kan ook Q^{-1} gegeven worden in plaats van Q.

Je kan je antwoord altijd voor jezelf op kladpapier controleren: test of Q volledige rang heeft en geldt $AQ = QJ$.

(b) Het bestaan van D en N is Corollary 5.4. Het bewijs daarvan geeft een algemene methode om D en N te vinden, die geoefend is in opgaven 5.6 – 5.8.

In dit specifieke geval kan het directer: D heeft dezelfde eigenwaarden als B, dus alleen -1. Daarom geldt $D = -I_2$ en dus $N = B + I_2$.

(c) We geven twee methoden om deze opgave te doen.
methode 1: Met gebruikmaking van het antwoord op (b). Uit het binomium van Newton, dat gebruikt mag worden **omdat N en D commuteren**, volgt

$B = D^{2014} + \binom{2014}{1} D^{2013} N + \cdots$, waarbij geldt $\cdots = 0$ omdat $N^2 = 0$. Het antwoord is dus

$$\begin{pmatrix} -4027 & 4028 \\ -4028 & 4029 \end{pmatrix}.$$

methode 2: Met alleen de Jordan-normaalvorm: er geldt $B = Q^{-1} J Q$ met de Jordannormaalvorm

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dus $B^{2014} = (Q^{-1} J Q)^{2014} = Q^{-1} J^{2014} Q$ (**zeg ook waarom!**). Reken Q en Q^{-1} uit en vind een algemene formule voor J^n. Zo'n algemene formule is eenvoudig te vinden door naar $J, J^2, J^3, \cdots$ te kijken; en te bewijzen met inductie. De formule is ook op het college aan bod geweest en een soortgelijke opgave (met e^B in plaats van B^n) is huiswerk geweest.

Opgave 2. Zij $\phi : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ de symmetrische bilineaire vorm gegeven door de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Bepaal een basis van $\mathbf{R}^2$ ten opzichte waarvan ϕ gegeven wordt door een diagonaalmatrix.

(b) Bepaal de rang en de signatuur van ϕ.

(c) Beantwoord (a) en (b) ook met $\mathbf{R}^2$ vervangen door $\mathbf{R}^3$ en

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Oplossing

(a) Het gaat hier om het diagonaliseren van een bilineaire vorm, dus **niet van een lineaire afbeelding**. De diagonaalvorm is dus Q^TAQ en **niet** $Q^{-1}AQ$. Dit is precies het verschil tussen *congruent* (onder Proposition 8.12) en *gelijkvormig* (*similar*, Lineaire Algebra 1).

Merk op: er werd om een **basis** gevraagd, dus Q (of beter: de kolommen van Q) moet gegeven worden.

De methode hiervoor is het bewijs van Theorem 8.19. Zie ook Example 8.21 en opgaven 8.8 en 8.9, en zie (c) hieronder.

Wie $Q^{-1}AQ$ schrijft, of diagonaliseert met behulp van eigenwaarden en eigenvectoren, maakt het zichzelf extra moeilijk om verschillende redenen:

- je hebt dan opeens de eigenwaarden (ingewikkelde getallen uit $\mathbf{R}$) nodig in plaats van alleen maar $\mathbf{Q}$,
- je gebruikt resultaten voor (matrices van) afbeeldingen en zal dus moeten opmerken dat, hoe, en waarom, Q^T hier gerelateerd is aan Q^{-1}, of dat, hoe, en waarom, de afbeelding gerelateerd is aan de bilineaire vorm.

(b) Als deel (a) correct gedaan is, neem dan voor r het aantal positieve elementen op de diagonaal en voor s het aantal negatieve elementen. De rang is dan $r + s$ en de signatuur $r - s$.

Alternatieve methode. Ook zonder deel (a) zijn er methoden om de rang en de signatuur te berekenen. Wat weet je bijvoorbeeld over r en s als ϕ positief definiet, negatief definiet, of niet-gedegenereerd is? En wat weet je als er v bestaat met $\phi(v, v) > 0$, of v met $\phi(v, v) < 0$? Met deze opmerkingen zijn de rang en de signatuur in dit geval uit te rekenen.

Opmerking. Dat de rang en de signatuur van een **bilineaire vorm** ook te berekenen zijn met eigenwaarden van de **lineaire afbeelding** gegeven door dezelfde matrix A is een niet-triviale stelling die geen deel van dit college is. Als je dat wilt gebruiken, dan zal je dat zelf moeten bewijzen. Zie daarvoor ook het verschil tussen Q^{-1} en Q^T hierboven. Hetzelfde geldt voor de bewering dat de rang van ϕ hetzelfde is als de rang van de lineaire afbeelding gegeven door A.

Het antwoord is: rang $2 + 0 = 2$, signatuur $2 - 0 = 2$.

(c) Zie (a) en (b). Verder:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \phi(v, w) = v^T A w \quad (v, w \in \mathbf{R}^3)$$

Stap 1 is beslissen of $\phi = 0$ geldt. Dat is duidelijk niet het geval, dus zoeken we (net als in het bewijs van Theorem 8.19) naar v_1 met $\phi(v_1, v_1) \neq 1$. Bijvoorbeeld $v_1 = (0, 1, 0)^T$ met $\phi(v_1, v_1) = 1$.

Vervolgens zoeken we een basis van het orthogonaal complement $\text{span}(v_1)^\perp$ van $\text{span}(v_1)$ met betrekking tot ϕ. Merk op: $\phi(w - \frac{\phi(w,v_1)}{\phi(v_1,v_1)} v_1, v_1) = 0$, dus door voor w een aantal basisvectoren te kiezen, krijgen we al snel mooie vectoren

$$w - \frac{\phi(w, v_1)}{\phi(v_1, v_1)} v_1 \in \text{span}(v_1)^\perp.$$

Zo leveren $w = (1, 0, 0)^T$ en $w = (0, 0, 1)^T$ de vectoren $b_1 = (1, -1, 0)^T, b_2 = (0, 0, 1)^T \in \text{span}(v_1)^\perp$. Laat Q be basistransformatie zijn die hoort bij de basis v_1, b_1, b_2.

We hebben dan

$$Q^T A Q = A' \quad \text{met} \quad A' = \left(\begin{array}{c|c} \phi(v_1, v_1) & 0 \;\; 0 \\ \hline \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} & C \end{array} \right) Q, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

en $C = (\phi(b_j, b_i))_{i,j}$.

We beginnen opnieuw, maar nu met C, in lagere dimensie. Merk op: $\phi_{\text{span}(v_1)^\perp \times \text{span}(v_1)^\perp}$ wordt ten opzichte van de basis b_1, b_2 gegeven door C. We rekenen C uit:

$$C = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

en we zoeken een vector $v_2 \in \mathbf{R}^2$ met $v_2^T C v_2 \neq 0$, bijvoorbeeld $v_2 = (1, 0)^T$ met $v_2^T C v_2 = -1$. Net als hiervoor maken we een vector

$$w - \frac{w^T C v_2}{v_2^T C v_2} v_2 \in \text{span}(v_2)^\perp.$$

Bijvoorbeeld: $w = (0, 1)^T$ geeft $(-1, 1)^T$. Nu is $v_2, (-1, 1)^T$ dus een diagonaliserende basis, met

$$P^T C P = C' := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Laat

$$Q' = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \;\; 0 \\ \hline \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} & P \end{array} \right),$$

dus

$$Q'^T A' Q' = D := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Samenstellen van de basistransformaties geeft dan:

$$D = Q'^T A' Q' = Q'^T Q^T A Q Q' = (QQ')^T A (QQ').$$

De gevraagde basis is nu de verzameling kolommen van

$$QQ' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ons antwoord is dus $(0,1,0)^T, (1,-1,0)^T, (-1,1,1)^T$.

Er zijn meerdere bases die een correct antwoord vormen. Je antwoord is achteraf direct te controleren door $\phi(\cdots,\cdots)$ uit te rekenen op deze basis.

De rang is $r + s = 1 + 1 = 2$ en de signatuur is $r - s = 1 - 1 = 0$.

Opgave 3. Beschouw de kwadratische vorm $q(x, y) = 7x^2 + 12xy - 2y^2$.

(a) Bepaal een symmetrische matrix A zodat voor alle $x, y \in \mathbf{R}$ geldt

$$q(x, y) = (x, y)A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

(b) Bepaal twee reële getallen a, b en een orthogonale afbeelding $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ zodat geldt $q(f(u, v)) = au^2 + bv^2$ voor alle $u, v \in \mathbf{R}$.

(c) Welke waarden neemt $q(x, y)$ aan op de eenheidscirkel $x^2 + y^2 = 1$?

Oplossing. (a) en (b) gaan precies zoals Example 10.10 en de alinea's erboven op pagina 44.

(c): Merk op dat f een isometrie is en dus een bijectie geeft van de eenheidscirkel naar de eenheidscirkel. Dus $q(x, y)$ neemt op de eenheidscirkel $x^2 + y^2 = 1$ precies dezelfde waarden aan als $au^2 + bv^2$ aanneemt op de eenheidscirkel $u^2 + v^2 = 1$. Dat wil zeggen, de waarden in het interval tussen a en b, inclusief a en b zelf.

Opgave 4. Beantwoord voor elk van de lineaire afbeeldingen f in (a)–(c) de vragen (i)–(iii). Er worden dus $3 \times 3 = 9$ antwoorden verwacht, inclusief negen bewijzen.

(a) Zij $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ de rotatie van 60 graden om de oorsprong. Hierbij heeft $\mathbf{R}^2$ het standaardinprodukt.

(b) Zij $f : \mathbf{C}^4 \to \mathbf{C}^4$ gegeven door $f(w) = w - \langle w, v\rangle v$ met $v = (7+i, 5-3i, 2, i)$. Hierbij heeft $\mathbf{C}^4$ het standaardinprodukt.

(c) Zij V de reële vectorruimte van polynomiale functies van graad ten hoogste 2 met het inprodukt

$$\langle p_1(x), p_2(x)\rangle = \int_{-1}^{1} p_1(x)p_2(x)dx$$

en zij $f : V \to V$ gegeven door $f(p(x)) = p'(x)$, de afgeleide van $p(x)$.

(i) Is f normaal?

(ii) Is f zelf-geadjungeerd?

(iii) Is f een isometrie?

Oplossing. De antwoorden zijn:
(a)(i) ja
(a)(ii) nee
(a)(iii) ja
(b)(i) ja
(b)(ii) ja
(b)(iii) nee
(c)(i) nee
(c)(ii) nee
(c)(iii) nee

Een algemene methode is het berekenen van de matrix van de afbeelding ten opzichte van een orthonormale basis, gevolgd door het toepassen van Corollary 9.18: het verband tussen de woorden normaal, zelf-geadjungeerd en isometrie enerzijds en de matrix-eigenschappen normaal, Hermites en unitair anderzijds. Hierbij is het belangrijk dat de gebruikte basis orthonormaal is, wat de standaardbasis bij (c) niet is. In het geval van (c) moet dus eerst het Gram-Schmidt-proces worden toegepast om een orthonormale basis te vinden.

Alternatieve oplossing. Het is ook mogelijk (maar niet verplicht) om deze opgave met meer inzicht en minder rekenwerk te doen. Examples 9.13 geeft bijvoorbeeld al implicaties die zorgen dat alleen (a)(ii), (a)(iii), (b)(ii), (b)(iii) en (c)(i) gedaan hoeven te worden. Hieronder staan wat oplossingen met variërende moeilijkheidsgraad.

(a)(ii) Een zelf-geadjungeerde afbeelding is een afbeelding f zodat voor alle u en v geldt $\langle f(u), v\rangle = \langle u, f(v)\rangle$. Tegenvoorbeelden u en v zijn makkelijk te vinden.

(a)(iii) Het mag bekend verondersteld worden dat rotaties afstanden en hoeken respecteren en dus isometrieën zijn.

(b)(ii) Een zelf-geadjungeerde afbeelding is een afbeelding f zodat voor alle u en w geldt $\langle f(u), w\rangle = \langle u, f(w)\rangle$. We rekenen beide kanten uit met behulp van de definitie van een Hermitese vorm over $\mathbf{C}$:

$$\langle f(u), w\rangle = \langle u - \langle u, v\rangle v, w\rangle = \langle u, w\rangle - \langle u, v\rangle\langle v, w\rangle$$

en

$$\langle u, f(w)\rangle = \langle u, w - \langle w, v\rangle v\rangle = \langle u, w\rangle - \overline{\langle w, v\rangle}\langle u, v\rangle = \langle u, w\rangle - \langle v, w\rangle\langle u, v\rangle.$$

(b)(iii) Een isometrie is een isomorfisme waarvoor geldt $\langle f(u), f(w)\rangle = \langle u, w\rangle$. De meeste vectoren u en w geven een tegenvoorbeeld.

Voor minimaal rekenwerk, neem $u = w = v$. We rekenen uit: $f(v) = v - \langle v, v\rangle v = cv$ met $c = 1 - \langle v, v\rangle = 1 - ||v||^2 < -1$. Er volgt dus

$$\langle f(v), f(v)\rangle = c^2\langle v, v\rangle \neq \langle v, v\rangle.$$

(c)(iii) Deze afbeelding is nilpotent, want de derde afgeleide van een kwadratisch polynoom is nul. De afbeelding is dus in het bijzonder geen isomorfisme, dus geen isometrie.

(c)(ii) Zoals (a)(ii). Of zoals (c)(i) maar dan met Theorem 10.9.

(c)(i) Deze afbeelding is nilpotent, want de derde afgeleide van een kwadratisch polynoom is nul. Als de afbeelding normaal zou zijn, dan zou de bijbehorende matrix wegens Theorem 10.6 diagonaliseerbaar zijn over $\mathbf{C}$. Een nilpotente diagonaliseerbare afbeelding is de nul-afbeelding. Aangezien f niet de nul-afbeelding is, is dit een tegenspraak.