Constructies in topologie

1. Producten

Zij $(X, \mathcal{T}_X)$ en $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische ruimtes.

Definitie 1.1. Het *product* van X en Y is de verzameling $X \times Y$ met de grofste topologie waarvoor de projecties $\pi_X \colon X \times Y \to X$ en $\pi_Y \colon X \times Y \to Y$ continu zijn. ♦

Propositie 1.2.
- *De topologie op $X \times Y$ heeft $\{U \times V \colon U \in \mathcal{T}_X, V \in \mathcal{T}_Y\}$ als basis.*
- *Voor alle topologische ruimtes A en continue functies $f \colon A \to X$ en $g \colon A \to Y$ is er een unieke continue functie $A \to X \times Y$ waarvoor het diagram*

$$\begin{tikzcd}
 & & X \\
A \arrow[urr, bend left, "f"] \arrow[r, dotted, "\exists!"] \arrow[drr, bend right, "g"'] & X \times Y \arrow[ur, "\pi_X"'] \arrow[dr, "\pi_Y"] & \\
 & & Y
\end{tikzcd}$$

  commuteert.
- *Stel dat (Z, p_X, p_Y) ook deze eigenschap heeft. Dan is er een uniek homeomorfisme $\varphi \colon Z \to X \times Y$ dat de projecties respecteert, dat wil zeggen $p_X = \pi_X \circ \varphi$ en $p_Y = \pi_Y \circ \varphi$.*
- *Een functie $h \colon A \to X \times Y$ is continu dan en slechts dan als $\pi_X \circ h$ en $\pi_Y \circ h$ continu zijn.* ♦

2. Disjuncte verenigingen

Zij $(X, \mathcal{T}_X)$ en $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische ruimtes.

Definitie 2.1. De *disjuncte vereniging* van X en Y is de verzameling $X \sqcup Y$ met de fijnste topologie waarvoor de inclusies $i_X \colon X \to X \sqcup Y$ en $i_Y \colon Y \to X \sqcup Y$ continu zijn. ♦

Propositie 2.2.
- *De verzameling van opens in $X \sqcup Y$ is $\{U \sqcup V : U \in \mathcal{T}_X, V \in \mathcal{T}_Y\}$.*
- *Voor alle topologische ruimtes A en continue functies $f \colon X \to A$ en $g \colon Y \to A$ is er een unieke continue functie $X \sqcup Y \to A$ waarvoor het diagram*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "i_X"'] \arrow[drr, bend left, "f"] & & \\
 & X \sqcup Y \arrow[r, dotted, "\exists!"] & A \\
Y \arrow[ur, "i_Y"] \arrow[urr, bend right, "g"'] & &
\end{tikzcd}$$

  commuteert.
- *Stel dat (Z, j_X, j_Y) ook deze eigenschap heeft. Dan is er een uniek homeomorfisme $\varphi \colon Z \to X \sqcup Y$ dat de inclusies respecteert, dat wil zeggen $i_X = \varphi \circ j_X$ en $i_Y = \varphi \circ j_Y$.*
- *Een functie $h \colon X \sqcup Y \to A$ is continu dan en slechts dan als $h \circ i_X$ en $h \circ i_Y$ continu zijn.* ♦

De deelverzamelingen $X, Y \subseteq X \sqcup Y$ zijn open en gesloten. Een topologische ruimte Z is samenhangend dan en slechts dan als deze niet homeomorf is met een disjuncte vereniging $X \sqcup Y$ met $X, Y \neq \varnothing$. Als Z eindig veel samenhangscomponenten $X_1, \ldots, X_n$ heeft, dan is Z homeomorf met $X_1 \sqcup \ldots \sqcup X_n$.

3. Deelruimtes

Zij $(X, \mathcal{T}_X)$ een topologische ruimte en $i\colon S \to X$ een injectieve functie.

Definitie 3.1. De *geïnduceerde topologie* op S is de grofste topologie op S waarvoor i continu is. ♦

Dit wordt meestal toegepast met i de inclusie van een deelverzameling. Dan heet S met de geïnduceerde topologie een *deelruimte* van X.

Propositie 3.2.
- *De verzameling van opens in S is $\{i^{-1}(U) : U \in \mathcal{T}_X\}$.*
- *Voor alle topologische ruimtes A en continue functies $f\colon A \to X$ die factoriseren over i is er een unieke continue functie $A \to S$ waarvoor het diagram*

$$\begin{tikzcd} & S \arrow[dr, "i"] & \\ A \arrow[ur, dotted, "\exists!"] \arrow[rr, "f"'] & & X \end{tikzcd}$$

  commuteert.
- *Stel dat (T, j) ook deze eigenschap heeft. Dan is er een uniek homeomorfisme $\varphi\colon T \to S$ waarvoor $j = i \circ \varphi$ geldt.*
- *Een functie $h\colon A \to S$ is continu dan en slechts dan als $i \circ h$ continu is.* ♦

4. Quotiëntruimtes

Zij $(X, \mathcal{T}_X)$ een topologische ruimte en $q\colon X \to Q$ een surjectieve functie.

Definitie 4.1. De *quotiënttopologie* op Q is de fijnste topologie op Q waarvoor q continu is. ♦

Dit wordt meestal alsvolgt toegepast. Zij $\sim$ een equivalentierelatie op X, en $X/{\sim}$ de verzameling equivalentieklassen. Dan is $q\colon X \to X/{\sim}$, $x \mapsto [x]$ surjectief, en $X/{\sim}$ met de quotiënttopologie heet een *quotiëntruimte* van X.

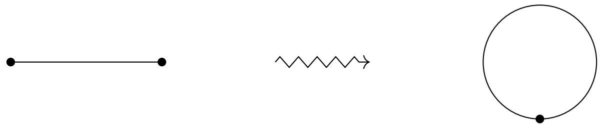
Propositie 4.2.
- *De verzameling van opens in Q is $\{U \subseteq Q : q^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X\}$.*
- *Voor alle topologische ruimtes A en continue functies $f\colon X \to A$ die factoriseren over q is er een unieke continu functie $Q \to A$ waarvoor het diagram*

$$\begin{tikzcd} & Q \arrow[dr, dotted, "\exists!"] & \\ X \arrow[ur, "q"] \arrow[rr, "f"'] & & A \end{tikzcd}$$

  commuteert.
- *Stel dat (R, r) ook deze eigenschap heeft. Dan is er een uniek homeomorfisme $\varphi\colon Q \to R$ waarvoor $q = r \circ \varphi$ geldt.*
- *Een functie $h\colon Q \to A$ is continu dan en slechts dan als $h \circ q$ continu is.* ♦

5. Voorbeeld

Neem op $\mathrm{I} = [0,1]$ de equivalentierelatie $\sim$ voortgebracht door $0 \sim 1$. Informeel krijgen we $\mathrm{I}/{\sim}$ door de twee uiteinden van het interval aan elkaar te plakken. Dit geeft een cirkel.



Stelling 5.1. *Het quotiënt* $\mathrm{I}/{\sim}$ *is homeomorf met* S^1.

Bewijs. Beschouw $f\colon \mathrm{I} \to \mathbb{R}^2$ gegeven door $x \mapsto (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$. Deze functie is continu omdat de twee projecties $\mathrm{I} \to \mathbb{R}, x \mapsto \cos 2\pi x$ en $I \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin 2\pi x$ continu zijn.

Zij i de inclusie van $\mathrm{S}^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ in $\mathbb{R}^2$. Omdat f binnen S^1 afbeeldt, is er een unieke continue functie $g\colon \mathrm{I} \to \mathrm{S}^1$ met $i \circ g = f$. Zij $q\colon \mathrm{I} \to \mathrm{I}/{\sim}$ de quotiëntafbeelding. Wegens $g(0) = g(1)$ is er een unieke continue functie $h\colon \mathrm{I}/{\sim} \to \mathrm{S}^1$ met $h \circ q = g$.

De functie $h\colon \mathrm{I}/{\sim} \to \mathrm{S}^1$ is continu en bijectief. Het domein $\mathrm{I}/{\sim}$ is compact (beeld van de compacte ruimte I) en het codomein S^1 is Hausdorff (deelruimte van de Hausdorff ruimte $\mathbb{R}^2$). Dus h is een homeomorfisme. ■