

## OPGAVEN WERKCOLLEGE 10 FEBRUARI 2014

Zij  $n \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ . De euclidische afstand op  $\mathbf{R}^n$  is de functie

$$d: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}: (x, y) \mapsto \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

Als  $x \in \mathbf{R}^n$  en  $\epsilon \geq 0$  dan is de open bal van straal  $\epsilon$  om  $x$  de deelverzameling

$$B_\epsilon(x) := \{y \in \mathbf{R}^n : d(x, y) < \epsilon\}$$

van  $\mathbf{R}^n$ .

Een deelverzameling  $U$  van  $\mathbf{R}^n$  heet *open* als voor alle  $x \in U$  er een  $\epsilon > 0$  is zodat  $B_\epsilon(x) \subset U$ . Een deelverzameling  $F$  van  $\mathbf{R}^n$  heet *gesloten* als het complement  $\mathbf{R}^n \setminus F$  open is in  $\mathbf{R}^n$ .

- (1) Ga voor elk van de volgende deelverzamelingen van  $\mathbf{R}$  na of ze open en of ze gesloten zijn:
  - (a)  $\emptyset$ ;
  - (b)  $\mathbf{R}$ ;
  - (c)  $(0, \infty)$ ;
  - (d)  $[0, \infty)$ ;
  - (e)  $[a, b]$  met  $a, b \in \mathbf{R}$  en  $a < b$ ;
  - (f)  $(a, b)$  met  $a, b \in \mathbf{R}$  en  $a < b$ ;
  - (g)  $(a, b]$  met  $a, b \in \mathbf{R}$  en  $a < b$ ;
  - (h)  $\mathbf{Z}$ ;
  - (i)  $\mathbf{Q}$ ;
  - (j)  $\{n^{-1} : n \in \mathbf{Z}_{>0}\}$ .
- (2) Ga voor de volgende deelverzamelingen van  $\mathbf{R}^2$  na of ze open en of ze gesloten zijn:
  - (a)  $\{(x, y) : x < 0\}$ ;
  - (b)  $\{(x, y) : x < 0, y \leq 0\}$ ;
  - (c)  $\{(x, y) : x \neq 0, y > 0\}$ ;
  - (d)  $\{(x, y) : x \neq y\}$ .
- (3) Laat zien dat elke eindige deelverzameling van  $\mathbf{R}^n$  gesloten is.
- (4) Zij  $(a_n)_n$  een rij reële getallen die convergeert naar  $a \in \mathbf{R}$ . Zij  $X \subset \mathbf{R}$  een gesloten deelverzameling met de eigenschap dat  $a_n \in X$  voor alle  $n$ . Laat zien dat  $a \in X$ .
- (5) Laat zien dat elke deelverzameling van  $\mathbf{R}^n$  te schrijven is als vereniging van gesloten deelverzamelingen van  $\mathbf{R}^n$ .