OPGAVEN WERKCOLLEGE TOPOLOGIE VAN 28 APRIL 2014

Voor definities, zie "constructies in topologie" op de website. Een afbeelding $f\colon X \to Y$ heet *open* als $f(U)$ open is in Y voor alle open $U \subset X$.

1. Opgaven

(1) Zij X en Y topologische ruimten. Laat zien dat de deelverzamelingen X en Y van $X \sqcup Y$ open en gesloten zijn.

(2) Zij X een topologische ruimte. Neem aan dat X slechts eindig veel samenhangscomponenten $X_1, \ldots, X_n$ heeft. Laat zien dat X homeomorf is met $X_1 \sqcup \ldots \sqcup X_n$.

(3) Zij $(X_i)_{i \in I}$ een familie topologische ruimten. Geef de verzameling $X = \sqcup_{i \in I} X_i$ de fijnste topologie waarvoor de inclusies $X_i \hookrightarrow X$ continu zijn.
   (a) Laat zien dat de open deelverzamelingen van X precies de deelverzamelingen van de vorm $\sqcup_{i \in I} U_i$ met U_i open in X_i voor alle i zijn;
   (b) Neem aan dat alle X_i samenhangend zijn. Bewijs dat de X_i precies de samenhangscomponenten van X zijn.

(4) Zij X een topologische ruimte en zij $(X_i)_{i \in I}$ de samenhangscomponenten van X. Beschouw de identiteitsafbeelding
$$f\colon \sqcup_{i \in I} X_i \to X.$$
Laat zien dat f continu is. Geef een X waarbij f *geen* homeomorfisme is.

(5) Zij X een topologische ruimte en $q\colon X \to Q$ een surjectieve afbeelding.
   (a) Bewijs (uit de definitie) dat $S \subset Q$ open is voor de quotiënttopologie dan en slechts dan als $q^{-1}(S) \subset X$ open is.
   (b) Geef een voorbeeld waarbij de afbeelding q niet open is.

(6) Geef een voorbeeld van een Hausdorffse ruimte X en een surjectieve afbeelding $X \to Q$ zodat de quotiënttopologie op Q *niet* Hausdorffs is.

(7) Laat zien dat de volgende vier topologische ruimten homeomorf zijn. (Hint: maak bij alle vier een schets).
   (a) $S^1 \times S^1$ met de produkttopologie (met $S^1 = \{x \in \mathbf{R}^2 \mid d(x,0) = 1\}$).
   (b) $([0,1] \times [0,1])/\sim$ met $(x,y) \sim (x',y')$ dan en slechts dan als $x' - x \in \mathbf{Z}$ en $y' - y \in \mathbf{Z}$.
   (c) $\mathbf{R}^2/\sim$ met $(x,y) \sim (x',y')$ dan en slechts dan als $x' - x \in \mathbf{Z}$ en $y' - y \in \mathbf{Z}$.
   (d) $\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid z^2 + (2 - \sqrt{x^2+y^2})^2 = 1\}$.

(8) Beschouw de eenheidscirkel S^1 in het complexe vlak. Zij $n \in \mathbf{Z}$ met $n \neq 0$. Definieer op S^1 de equivalentierelatie $\sim$ met $z_1 \sim z_2$ dan en slechts dan als $(z_1/z_2)^n = 1$. Laat zien dat $S^1/\sim$ homeomorf is met S^1.

(9) Zij X en Y topologische ruimten. Zij $q\colon X \to Q$ een surjectie. Geef Q de quotienttopologie. Zij $\mathcal{T}_1$ de produkttopologie op $Q \times Y$. Zij $\mathcal{T}_2$ de quotienttopologie op $Q \times Y$ voor de surjectieve afbeelding $X \times Y \to Q \times Y$.
   (a) Laat zien dat $\mathrm{id}\colon (Q \times Y, \mathcal{T}_2) \to (Q \times Y, \mathcal{T}_1)$ continu is.
   (b) Neem aan dat q open is. Laat zien dat $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.
   ($\star$) Geef een voorbeeld waarbij $\mathcal{T}_1 \neq \mathcal{T}_2$.