OPGAVEN WERKCOLLEGE TOPOLOGIE VAN 7 MEI 2014

Een topologische ruimte X heet *samentrekbaar* als X homotopie-equivalent is met de eenpuntsruimte $\{\mathrm{pt}\}$.

Voor topologische ruimten X en Y schrijven we $\mathrm{Map}(X,Y)$ voor de verzameling continue afbeeldingen van X naar Y, en $\mathrm{hMap}(X,Y) = \mathrm{Map}(X,Y)/\sim$ voor de verzameling van homotopieklassen van continue afbeeldingen.

(1) Beschouw de afbeeldingen $f\colon \mathbf{C}^\times \to \mathbf{C}^\times, z \mapsto \bar{z}$ en $g\colon \mathbf{C}^\times \to \mathbf{C}^\times, z \mapsto z^{-1}$. Laat zien dat f en g homotoop zijn.

(2) Zij X, X', Y, Y' topologische ruimten.
  (a) Neem aan dat X en X', respectievelijk Y en Y' homeomorf zijn. Laat zien dat er een bijectie $\mathrm{Map}(X,Y) \to \mathrm{Map}(X',Y')$ is.
  (b) Neem aan dat X en X', respectievelijk Y en Y' homotopie-equivalent zijn. Laat zien dat er een bijectie $\mathrm{hMap}(X,Y) \to \mathrm{hMap}(X',Y')$ is.

(3) (a) Laat zien dat een topologische ruimte Y wegsamenhangend is dan en slechts dan als $\mathrm{hMap}(\{\mathrm{pt}\},Y)$ uit precies één element bestaat.
  (b) Zij Y en Y' homotopie-equivalente ruimten. Laat zien dat Y wegsamenhangend is dan en slechts dan als Y' wegsamenhangend is.

(4) Zij Y wegsamenhangend. Zij $f, g\colon \mathbf{R}^n \to Y$ continue afbeeldingen. Laat zien dat $f \sim g$. (Hint: gebruik de voorgaande opgaven.)

(5) Een deelverzameling X van $\mathbf{R}^n$ heet een *stervormig domein* als X niet leeg is, en als voor alle $x \in X$ en voor alle $\lambda \in [0,1]$ geldt $\lambda x \in X$.
  (a) Zij Y een topologische ruimte en zij $f, g\colon Y \to X$ continu. Laat zien dat f en g homotoop zijn.
  (b) Laat zien dat X samentrekbaar is.

(6) Bewijs dat $\mathbf{Z}$ en $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$ homotopie-equivalent zijn.

(7) Zij X, X' en Y topologische ruimten. Neem aan dat X homotopie-equivalent is met X'. Laat zien dat $X \times Y$ homotopie-equivalent is met $X' \times Y$.

(8) Zij X een topologische ruimte. Bewijs dat volgende uitspraken equivalent zijn:
  (a) X is samentrekbaar;
  (b) $X \neq \varnothing$ en id_X is homotoop met een constante afbeelding $X \to X$;
  (c) voor alle topologische ruimten Y bestaat $\mathrm{hMap}(Y,X)$ uit precies één element.

(9) Zij X een topologische ruimte. Zij $A \subset X$ een deelruimte. Zij $F\colon [0,1] \times X \to X$ een continue afbeelding met $F(t,a) = a$, $F(0,x) = x$ en $F(1,x) \in A$ voor alle $t \in [0,1]$, $x \in X$ en $a \in A$. (We zeggen dat A een *sterk deformatieretract* van X is.) Laat zien dat A en X homotopie-equivalent zijn.

(10) Zij $X = \{x \in \mathbf{R}^{n+1} \colon 0 < d(x,0) \leq 1\}$. Zij $S^n = \{x \in \mathbf{R}^{n+1} \colon d(x,0) = 1\}$. Laat zien dat S^n een sterk deformatieretract is van X.

(11) Zij $X = \big([-1,1] \times [-1,1]\big) \setminus \{0\}$ met de Euclidische topologie. Zij

$$A = \partial\left([-1,1] \times [-1,1]\right) = \big(\{-1,1\} \times [-1,1]\big) \cup \big([-1,1] \times \{-1,1\}\big).$$

Laat zien dat $A \subset X$ een sterk deformatieretract is.

(12) Bewijs dat

$$A = \big(S^1 \times \{1\}\big) \cup \big(\{1\} \times S^1\big)$$

een deformatieretract van

$$X = \big(S^1 \times S^1\big) \setminus \{(-1, -1)\}$$

Maak een schets van X en haar deelverzameling A.

(13) Geef een voorbeeld van een continue surjectieve afbeelding $f\colon S^1 \to S^1$ die homotoop is met een constante afbeelding.

($*$) Zij V de vectorruimte van alle begrensde reële rijen $(x_i)_{i\in\mathbf{N}}$. Zij $\|\cdot\|$ de norm gegeven door

$$\|(x_i)_{i\in\mathbf{N}}\| = \sup\,\{|x_i|\colon i \in \mathbf{N}\}\,,$$

en geef V de topologie gegeven door deze norm. Bewijs dat $V \setminus \{0\}$ samentrekbaar is. (Hint: beschouw de translatie-afbeelding $T\colon V \setminus \{0\} \to V \setminus \{0\}$ die $(x_n)_n$ stuurt naar $(y_n)_n$ met $y_0 = 0$ en $y_n = x_{n-1}$ voor $n > 0$. Bewijs eerst dat T continu is, en homotoop met $\mathrm{id}_{V\setminus\{0\}}$. Bewijs dan dat T homotoop is met een constante afbeelding.)