OPGAVEN WERKCOLLEGE TOPOLOGIE VAN 13 MEI 2013

(1) Zij $C \subset \mathbf{R}^n$ een convexe deelverzameling. Dat wil zeggen dat voor alle $x, y \in C$ en alle $\lambda, \mu \in [0, 1]$ met $\lambda + \mu = 1$ geldt dat $\lambda x + \mu y \in C$. Zij $x_0 \in C$. Bewijs dat $\pi(C, x_0)$ de triviale groep is.

(2) Zij $f: X \to Y$ een continue afbeelding. Zij $x \in X$ en $y := f(x) \in Y$. Laat zien dat de afbeelding

$$f_*: \pi(X, x) \to \pi(Y, y), \quad [\gamma] \mapsto [f \circ \gamma]$$

een goed-gedefinieerd groepshomomorfisme is.

(3) Zij $f: X \to Y$ en $g: Y \to Z$ continu. Zij $x \in X$, en schrijf $y := f(x)$ en $z := g(y)$. Laat zien dat de afbeeldingen $g_* \circ f_*: \pi(X, x) \to \pi(Z, z)$ en $(g \circ f)_*: \pi(X, x) \to \pi(Z, z)$ gelijk zijn.

(4) Zij $f: S^1 \to S^1$ een continue afbeelding met $f(1) = 1$. Laat zien dat er een unieke $n \in \mathbf{Z}$ is met $f_*[\gamma] = [\gamma]^n$ voor alle $[\gamma] \in \pi(S^1, 1)$. (Deze n noemen we de *graad* van f.) Hint: gebruik dat $\pi(S_1, 1)$ isomorf is met $\mathbf{Z}$.

(5) (a) Laat zien dat $S^1 \to S^1, z \mapsto z^d$ graad d heeft;
(b) Wat is de graad van $S^1 \to S^1, z \mapsto \bar{z}$?
(c) Geef een surjectieve continue $f: S^1 \to S^1$ van graad 0.

(6) Zij $x \in S^2$ en zij $\gamma \in P(S^2, x)$. Neem aan dat γ niet surjectief is. Bewijs dat $\gamma \simeq x$ (waar x staat voor het constante pad met beeld $\{x\}$). Hint: zij $y \in S^2$ een punt dat niet in het beeld van γ ligt; gebruik y om een weghomotopie van γ naar het constante pad x te construeren.

(7) Zij X, Y topologische ruimten, en zij $x \in X$ en $y \in Y$. Laat zien dat

$$\pi(X \times Y, (x, y)) \to \pi(X, x) \times \pi(Y, y), \quad [\gamma] \mapsto ([p_X \circ \gamma], [p_Y \circ \gamma])$$

een isomorfisme is. (Merk op dat de afbeelding goed-gedefinieerd is dankzij opgave (2)). Hint: construeer een inverse afbeelding. Concludeer dat de fundamentaalgroep van de torus isomorf is met $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$.

(8) Voor een topologische ruimte X, elementen $x, y \in X$ en een weg $\alpha \in P(X; x, y)$ definiëren we de afbeelding

$$\phi_\alpha: \pi(X, x) \to \pi(X, y), \quad [\gamma] \mapsto [\alpha^{-1} \odot \gamma \odot \alpha].$$

(a) Bewijs dat ϕ_α goed-gedefinieerd is.
(b) Bewijs dat ϕ_α een homomorfisme is.
(c) Bewijs dat $\phi_{\alpha^{-1}} \circ \phi_\alpha$ de identiteit op $\pi(X, x)$ is.
(d) Bewijs dat ϕ_α een isomorfisme van groepen is.

(9) Zij X een topologische ruimte en $Y \subset X$. Zij $F: [0, 1] \times X \to X$ een *sterk deformatieretract*, dat wil zeggen een continue afbeelding zodat $F(0, x) = x$, $F(1, x) \in Y$ en $F(t, y) = y$ voor alle $x \in X$, $y \in Y$ en $t \in [0, 1]$. Zij $i: Y \to X$ de inclusie en $r: X \to Y$ de afbeelding $x \mapsto F(1, x)$. Zij $y_0 \in Y$.
(a) Laat zien dat $r_* \circ i_*$ de identiteitsafbeelding op $\pi(Y, y_0)$ is.
(b) Laat zien dat $i_* \circ r_*$ de identiteitsafbeelding op $\pi(X, y_0)$ is.
(c) Concludeer dat $\pi(X, y_0)$ en $\pi(Y, y_0)$ isomorf zijn.
(d) Zij nu $X = \mathbf{C} \setminus \{0\}$ en $Y = S^1$. Vind een F zoals hierboven en concludeer dat $\pi(\mathbf{C} \setminus \{0\}, 1)$ en $\pi(S^1, 1)$ isomorf zijn.