OPGAVEN WERKCOLLEGE TOPOLOGIE VAN 19 MEI 2014

(1) Zij B de open eenheidsbal in $\mathbf{R}^2$. Vind een continue afbeelding $f\colon B \to B$ zonder vaste punten. Idem voor S^n.

(2) Zij X een topologische ruimte en $x \in X$. Zij $Y \subset X$ de wegsamenhangende component die x bevat. Laat zien dat de inclusie $i\colon Y \to X$ een *isomorfisme* $i_*\colon \pi(Y, x) \to \pi(X, x)$ induceert.

(3) Zij X en Y topologische ruimten. Zij $x \in X$. Zij $f, g\colon X \to Y$ continu. Zij $F\colon [0,1] \times X \to Y$ een homotopie van f naar g.

(a) Laat zien dat $\alpha\colon [0,1] \to Y$, $s \mapsto F(s, x)$ een weg is van $f(x)$ naar $g(x)$.

Beschouw het isomorfisme van opgave (8) van vorige week:

$$\phi_\alpha\colon \pi(Y, f(x)) \to \pi(Y, g(x)),\ [\gamma] \mapsto [\alpha^{-1} \odot \gamma \odot \alpha].$$

(b) Laat zien dat $g_* = \phi_\alpha \circ f_*$ als homomorfismen $\pi(X, x) \to \pi(Y, g(x))$.

(4) Zij X en Y topologische ruimten. Zij $f\colon X \to Y$ een homotopie-equivalentie met homotopie-inverse g.

(a) Laat zien dat voor alle $x \in X$ de samenstelling

$$g_* \circ f_*\colon \pi(X, x) \to \pi(Y, f(x)) \to \pi(X, g(f(x)))$$

een isomorfisme is.

(b) Concludeer dat $f_*\colon \pi(X, x) \to \pi(Y, f(x))$ injectief is voor alle $x \in X$.

(c) Idem, $g_*\colon \pi(Y, y) \to \pi(X, g(y))$ is injectief voor alle $y \in Y$.

(d) Concludeer uit (a), (b) en (c) dat voor alle $x \in X$ het homomorfisme $f_*\colon \pi(X, x) \to \pi(Y, f(x))$ een isomorfisme is.

(5) Beschouw in $\mathbf{R}^3$ de cirkel $C = \{(x, y, 0) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ en de as $Z = \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbf{R}\}$. Zij X het complement $\mathbf{R}^3 \setminus (C \cup Z)$ en zij $x \in X$. Bewijs dat de groep $\pi(X, x)$ isomorf is met $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$.

(6) Zij $p\colon X \to Y$ een overdekking. Zij $x \in X$. Laat zien dat de geïnduceerde afbeelding $p_*\colon \pi(X, x) \to \pi(Y, p(y))$ injectief is.

($\star$) Zij X de 'acht-ruimte': de verenging van de cirkels met straal 1 en middelpunten $(0, 1)$ en $(0, -1)$. Bewijs dat de fundamentaalgroep van X niet abels is. Concludeer dat de fundamentaalgroep van $\mathbf{R}^2 \setminus \{p, q\}$, met $p \neq q$, niet abels is. (Hint: zij α en β de voor de hand liggende lussen in X; construeer een overdekking $p\colon Y \to X$ zodat de wegliften van $\alpha\beta$ en $\beta\alpha$ naar Y verschillende eindpunten hebben; dit kan met $|p^{-1}(x)| = 3$ voor alle x.)