OPGAVEN WERKCOLLEGE 17 FEBRUARI 2014

Zij (X,d) een metrische ruimte. Een deelverzameling F van X heet *gesloten in* (X,d) als $X \setminus F$ open is in (X,d).

(1) Zij (X,d) een metrische ruimte en $x \in X$. Bewijs dat $\{x\}$ gesloten is in X.

(2) Zij (X,d) een metrische ruimte en $U \subset X$ open. Bewijs dat U te schrijven is als vereniging van open ballen in (X,d).

(3) Verifieer in detail dat voor een genormeerde vectorruimte $(V, \|\cdot\|)$ over $\mathbf{R}$ de functie $d\colon V \times V \to \mathbf{R}, (v,w) \mapsto \|w - v\|$ een metriek op V definieert.

(4) (Runde 2.1.1) Zij S een verzameling en X de verzameling van eindige deelverzamelingen van S. Laat zien dat

$$d\colon X \times X \to \mathbf{R},\ (A,B) \mapsto |(A \backslash B) \cup (B \backslash A)|$$

een metriek op X is. (Voor een eindige verzameling C noteren we met $|C|$ het aantal elementen van C.)

(5) (Zie ook Runde 2.1.2) Zij S een niet-lege verzameling, en $(V, \|\cdot\|_V)$ een genormeerde vectorruimte over $\mathbf{R}$. Een functie $f\colon S \to V$ heet *begrensd* als er een $M \in \mathbf{R}$ bestaat zodat voor alle $s \in S$ geldt $\|f(s)\| \leq M$. Zij X de verzameling van begrensde functies $S \to V$. Laat zien dat X een deelvectorruimte is van de vectorruimte van alle functies van S naar V en dat

$$\|\cdot\|\colon X \to \mathbf{R},\ f \mapsto \|f\|_X = \sup_{s \in S} \|f(s)\|_V$$

een norm is op X.

(6) Zij $V = \mathbf{R}^2$. Beschouw op V de Euclidische norm

$$\|\cdot\|_E\colon V \to \mathbf{R},\ (x,y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$$

en de Manhattannorm

$$\|\cdot\|_M\colon V \to \mathbf{R},\ (x,y) \mapsto |x| + |y|,$$

en de door deze normen gedefinieerde metrieken d_E en d_M.

(a) Laat zien dat voor alle $v \in V$ geldt

$$\|v\|_E \leq \|v\|_M \leq \sqrt{2}\|v\|_E.$$

(b) Zij $\epsilon > 0$ en $v \in V$. Laat zien dat er een $\epsilon' > 0$ bestaat zodat de Euclidische open bal

$$B^E_{\epsilon'}(v) = \{w \in \mathbf{R}^2 \mid d_E(v,w) < \epsilon'\}$$

bevat is in de Manhattan open bal

$$B^M_{\epsilon}(v) = \{w \in \mathbf{R}^2 \mid d_M(v,w) < \epsilon\}.$$

(c) Andersom: Zij $\epsilon > 0$ en $v \in V$. Laat zien dat er een $\epsilon' > 0$ bestaat zodat de Manhattan open bal $B^M_{\epsilon'}(v)$ bevat is in de Euclidische open bal $B^E_{\epsilon}(v)$.

(d) Concludeer dat een deelverzameling $U \subset V$ open is voor de Euclidische metriek dan en slechts dan als die open is voor de Manhattanmetriek.

(7) Zij d de Euclidische metriek op $\mathbf{R}$, dus $d(x,y) = |y-x|$. In deze opgave laten we zien dat $\emptyset$ en $\mathbf{R}$ de enige deelverzamelingen van $\mathbf{R}$ zijn die zowel open als gesloten zijn in $(\mathbf{R}, d)$.

(a) Neem aan dat $U \subset \mathbf{R}$ zowel open en gesloten is. Laat (met behulp van de ϵ-δ definitie) zien dat de functie

$$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{als } x \in U \\ 0 & \text{als } x \notin U \end{cases}$$

continu is.

(b) Gebruik de tussenwaardestelling om te laten zien dat $U \in \{\emptyset, \mathbf{R}\}$.