OPGAVEN BIJ WERKCOLLEGE TOPOLOGIE VAN 24 FEBRUARI 2014

(1) Geef van elk van de volgende deelverzamelingen van $\mathbf{R}$ het inwendige, de afsluiting en de rand.
   (a) $(0, \infty)$;
   (b) $[0, \infty)$;
   (c) $\{n^{-1} : n \in \mathbf{Z}_{>0}\}$;
   (d) $\mathbf{Q}$.

(2) Geef van elk van de volgende deelverzamelingen van $\mathbf{R}^2$ het inwendige, de afsluiting en de rand.
   (a) $\{(x, y) : x < 0\}$;
   (b) $\{(x, y) : x < 0, y \leq 0\}$;
   (c) $\{(x, y) : x \neq 0, y > 0\}$;
   (d) $\{(x, y) : x \neq y\}$.

(3) Zij (X, d) een metrische ruimte en A en B deelverzamelingen van X. Bewijs of weerleg:
   (a) $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$;
   (b) $A^{\circ\circ} = A^\circ$;
   (c) $\partial\partial A = \partial A$;
   (d) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$;
   (e) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$;
   (f) $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cap \bar{B}$;
   (g) $(A \cup B)^\circ = A^\circ \cup B^\circ$.

(4) Zij (X, d) een metrische ruimte en $A \subset X$.
   (a) Laat zien dat $\partial A = \bar{A} \backslash A^\circ$.
   (b) Laat zien dat $\partial A = \emptyset$ dan en slechts dan als A gesloten en open is.

(5) (Runde 2.2.4) Zij (X, d) een metrische ruimte, $S \subset X$ een niet-lege deelverzameling, en $x \in X$. Definieer de *afstand* van x tot S als

$$\operatorname{dist}(x, S) = \inf\{d(x, s) \colon s \in S\}.$$

   Laat zien dat $\bar{S} = \{x \in X \colon \operatorname{dist}(x, S) = 0\}$. (Hint: gebruik propositie 2.2.13).

(6) (Runde 2.2.6) Zij (X, d) een metrische ruimte en (Y, d) een *deelruimte*: een deelverzameling $Y \subset X$ met de metriek d van X, beperkt tot Y. Dit is weer een metrische ruimte. Bewijs dat $U \subset Y$ open is in Y dan en slechts dan als er een open deelverzameling $V \subset X$ bestaat met $U = V \cap Y$.

(7) Zij (X, d) een metrische ruimte. Een deelverzameling $S \subset X$ heet *dicht* als $\bar{S} = X$. Bewijs of weerleg:
   (a) $S \subset X$ is dicht dan en slechts dan als voor elke niet-lege open $U \subset X$ geldt $S \cap U \neq \emptyset$;
   (b) Voor een open dichte deelverzameling S van X geldt $S = X$;
   (c) Als S_1 en S_2 dicht zijn in X dan is ook $S_1 \cap S_2$ dicht;

(8) Zij (X, d) een metrische ruimte en $S \subset X$. Laat zien dat S dicht is in X dan en slechts dan als voor elke $\epsilon > 0$ geldt

$$X = \bigcup_{s \in S} B_\epsilon(s).$$

(9) (Runde 2.2.5) Zij V de vectorruimte van rëele rijen $(x_n)_{n \geq 0}$ die convergeren naar 0. Zij $\|\cdot\| \colon V \to \mathbf{R}_{\geq 0}$ de norm gegeven door $(x_n)_{n \geq 0} \mapsto \sup\{|x_n| \colon n \geq 0\}$. Zij $S \subset V$ de deelverzameling

$$S := \{(x_n)_{n \geq 0} \colon \text{ er is een } N \text{ zodat voor alle } n \geq N \text{ geldt } x_n = 0\}.$$

Laat zien dat S dicht is in V.

Definitie. Zij (X, d) een metrische ruimte en $x \in X$ een punt. Een rij $(x_n)_{n \geq 0}$ in X *convergeert* naar x als voor alle $\epsilon > 0$ er een $N \geq 0$ is zodanig dat voor alle $n \geq N$ geldt $d(x_n, x) < \epsilon$. We zeggen dan ook wel dat x de *limiet* van de rij is. (Maar pas op: niet elke rij heeft een limiet!)

(10) Zij (X, d) een metrische ruimte, $(x_n)_{n \geq 0}$ een rij in X en $x, y \in X$ zodanig dat $(x_n)_{n \geq 0}$ naar zowel x als y convergeert. Bewijs: $x = y$.

(11) Zij (X, d) een metrische ruimte en $(x_n)_{n \geq 0}$ een rij in X die naar $x \in X$ convergeert. Zij F gesloten in (X, d) en neem aan dat voor alle $n \geq 0$ geldt $x_n \in F$. Toon aan $x \in F$.