OPGAVEN WERKCOLLEGE TOPOLOGIE VAN 3 MAART 2014

(1) Zij $(V, \|\cdot\|_V)$ en $(W, \|\cdot\|_W)$ genormeerde reële vectorruimten en $f\colon V \to W$ een lineaire afbeelding. Laat zien dat f continu in 0 is dan en slechts dan als er een $C > 0$ bestaat zodat voor alle $v \in V$ geldt $\|f(v)\|_W \leq C\|v\|_V$.

(2) Zij $(V, \|\cdot\|_V)$ en $(W, \|\cdot\|_W)$ genormeerde vectorruimten en $f\colon V \to W$ een lineaire afbeelding. Laat zien dat f continu is dan en slechts dan als f continu is in 0.

(3) Zij (X, d) een metrische ruimte en $z \in X$. Toon aan dat de functie

$$f\colon X \to \mathbf{R}\colon x \mapsto d(x, z)$$

continu is. (Met de Euclidische metriek op $\mathbf{R}$).

(4) Zij (X, d_X) een metrische ruimte en (Y, d_Y) een discrete metrische ruimte. Zij $f\colon X \to Y$ een functie. Laat zien dat f continu is dan en slechts dan als voor alle $x \in X$ er een $\epsilon > 0$ is zodat f constant is op $B_\epsilon(x)$. (Zulke functies heten *lokaal constant*).

(5) Zij (X, d_X) en (Y, d_Y) metrische ruimten en $f\colon X \to Y$ een surjectieve continue functie. Zij $S \subset X$ dicht. Laat zien dat $f(S) \subset Y$ dicht is.

(6) Zij (X, d_X) en (Y, d_Y) metrische ruimten. Zij f en g continue afbeeldingen van X naar Y.
   (a) Laat zien dat $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ gesloten is in (X, d_X);
   (b) Zij $S \subset X$ dicht. Neem aan dat $f(s) = g(s)$ voor alle $s \in S$. Laat zien dat $f = g$.

(7) Zij (X, d_X) en (Y, d_Y) metrische ruimten. Een afbeelding $f\colon X \to Y$ heet *open* als $f(U) \subset Y$ open is voor alle open $U \subset X$. Geef een voorbeeld van een continue afbeelding die niet open is. Geef een voorbeeld van een open afbeelding die niet continu is.

(8) Zij (X, d) een eindige metrische ruimte. Laat zien dat d equivalent is met de discrete metriek.

(9) Zij V de vectorruimte van continue functies $f\colon [0,1] \to \mathbf{R}$. Beschouw op V de normen $\|\cdot\|_1$ en $\|\cdot\|_\infty$ gegeven door

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| \mathrm{d}t, \qquad \|f\|_\infty = \sup\{|f(t)|\colon t \in [0,1]\},$$

en hun geassocieerde metrieken d_1 en d_∞. Beschouw in V de rij $(f_n)_{n\geq 1}$ met $f_n\colon t \mapsto t^n$. Laat zien dat (f_n) naar 0 convergeert in (V, d_1) maar niet in (V, d_∞). Concludeer dat d_1 en d_∞ niet equivalent zijn.

(10) Laat zien dat voor alle n de metrische ruimte $\mathbf{R}^n$ volledig is. (Je mag hierbij gebruiken dat $\mathbf{R}$ volledig is).