OPGAVEN WERKCOLLEGE TOPOLOGIE VAN 17 MAART 2013

(1) (Runde 2.4.2, 2.4.3.) Zij (X, d) een niet-lege volledige metrische ruimte. Zij $0 < \theta < 1$.
   (a) Zij $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ een rij in X met $d(x_n, x_{n+1}) \leq \theta d(x_{n-1}, x_n)$ voor alle n. Laat zien dat $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ convergent is. (Hint: toon aan dat (x_n) een Cauchy-rij is.)
   (b) Zij $f \colon X \to X$ een afbeelding zo dat voor alle $x, y \in X$ geldt
   $$d(f(x), f(y)) \leq \theta d(x, y).$$
   (Zo een afbeelding heet een *contractie*). Laat zien dat er een $z \in X$ bestaat met $f(z) = z$. (Hint: kies een $z_0 \in X$ en beschouw de rij $(z_0, f(z_0), f(f(z_0)), \ldots)$.)

(2) Beschouw op $\mathbf{R}$ de Euclidische metriek d_1 en de *arctangens metriek*
$$d_2 \colon \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}_{\geq 0} \colon (x, y) \mapsto |\arctan x - \arctan y| .$$
Laat zien dat d_2 een metriek is. Laat zien dat d_1 en d_2 equivalent zijn. Laat zien dat $(\mathbf{R}, d_2)$ niet volledig is. (Merk op dat $(\mathbf{R}, d_1)$ *wel* volledig is.)

(3) We zeggen dat een functie $f \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *compacte drager heeft* als er een r is zodat $f(x) = 0$ voor alle x met $|x| > r$. Zij V de verzameling van alle begrensde continue functies $f \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, en $W \subset V$ de deelverzameling bestaande uit die functies die een compacte drager hebben.
   (a) Laat zien dat $\| \cdot \| \colon f \mapsto \sup \{|f(t)| \colon t \in \mathbf{R}\}$ een norm is op V.
   (b) Geef een rij (f_n) in W die convergeert naar $f \colon x \mapsto e^{-x^2}$ in V.
   (c) Concludeer dat W niet volledig is.
   ($*$) Is V volledig?

(4) Geef van de volgende deelverzamelingen van $\mathbf{R}$ een open overdekking die geen eindige deeloverdekking heeft: $\mathbf{Z}$, $\mathbf{R}$, $[0, 1)$.

(5) (Runde 2.5.1) Zij (X, d) discreet. Laat zien dat X compact is dan en slechts dan als X eindig is.

(6) Zij (X, d) een metrische ruimte, zij $S \subset X$ met $S \neq \emptyset$, en zij $x \in X$. Laat zien dat $(B_n(x))_{n>0}$ een open overdekking is van S, en dat deze een eindige deeloverdekking heeft dan en slechts dan als $\operatorname{diam} S < \infty$.

(7) Zij $x \in (0, 1)$. Geef een open overdekking van $[0, 1] \setminus \{x\}$ die geen eindige deeloverdekking heeft. Laat zien dat $[0, 1] \cap \mathbf{Q}$ niet compact is.

(8) Zij (X, d_X) een metrische ruimte en K_1, K_2 compacte deelverzamelingen van X. Laat zien dat $K_1 \cup K_2$ compact is.

(9) (Runde 2.5.2) Zij (X, d) een metrische ruimte en $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ een rij in X met limiet x. Laat zien dat $\{x\} \cup \{x_n \colon n \in \mathbf{N}\}$ compact is.