# OPGAVEN WERKCOLLEGE TOPOLOGIE VAN 24 MAART 2014

(1) Zij $X$ een metrische ruimte en $K_1$ en $K_2$ compacte deelverzamelingen van $X$. Laat zien dat $K_1 \cap K_2$ compact is. (Hint: laat eerst zien dat $K_1 \cap K_2$ gesloten is in $K_1$).

(2) Zij $X$ een discrete metrische ruimte. Bewijs (met de definitie) dat $X$ rij-compact is dan en slechts dan als $X$ eindig is.

(3) Zij $X$ een discrete metrische ruimte. Bewijs (met de definitie) dat $X$ totaal begrensd is dan en slechts dan als $X$ eindig is.

(4) Beschouw op $\mathbf{R}$ de metrieken $d_1$ en $d_2$ gegeven door

$$d_1(x, y) = |y - x|$$

en

$$d_2(x, y) = |\arctan y - \arctan x| \,.$$

(Merk op dat $d_1$ en $d_2$ equivalent zijn.) Laat zien dat $(X, d_2)$ totaal begrensd is maar dat $(X, d_1)$ niet totaal begrensd is. Zijn $(X, d_1)$ en $(X, d_2)$ compact?

(5) Zij $(X_1, d_1)$ en $(X_2, d_2)$ metrische ruimten. Beschouw op $X = X_1 \times X_2$ de metriek

$$d\colon X \times X \to \mathbf{R}, ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto \max(d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)).$$

Neem aan dat $(X_1, d_1)$ en $(X_2, d_2)$ compact zijn. Bewijs dat $(X, d)$ compact is. (Hint: bewijs dat $X$ rij-compact is.)

(6) Bewijs dat een niet-lege compacte deelverzameling van $\mathbf{R}$ een maximum heeft.

(7) Zij $X$ en $Y$ metrische ruimten, en neem aan dat $X$ compact is. Bewijs dat elke continue functie $f\colon X \to Y$ *uniform continu* is. Met andere woorden: bewijs dat voor alle $\epsilon > 0$ er een $\delta > 0$ is zodat voor alle $x_1, x_2 \in X$ met $d_X(x_1, x_2) < \delta$ geldt $d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \epsilon$.

(8) Zij $X$ een metrische ruimte. Zij $K \subset X$ compact en $F \subset X$ gesloten. Neem aan dat voor alle $\epsilon > 0$ er een $x \in K$ en $y \in F$ is met $d(x, y) < \epsilon$. Bewijs dat $K \cap F$ niet leeg is.