OPGAVEN WERKCOLLEGE TOPOLOGIE VAN 31 MAART 2014

Zij $(X, \mathcal{T})$ een topologische ruimte en $S \subset X$. We definiëren het *inwendige* van S als

$$S^\circ := \bigcup_{\substack{U \in \mathcal{T} \\ U \subset S}} U$$

en de *rand* ∂S van S als de verzameling van alle $x \in X$ zodat voor elk $U \in \mathcal{T}$ met $x \in U$ geldt $U \cap S \neq \emptyset$ en $U \cap (X \setminus S) \neq \emptyset$.

(1) Zij $X = \{1, 2, 3\}$. Geef een topologie op X zodat de afsluiting van $\{1\}$ de verzameling $\{1, 2\}$ is.

(2) Zij X een verzameling en $\mathcal{T} = \{U \subset X : X \setminus U \text{ is eindig}\} \cup \{\emptyset\}$. Laat zien dat $\mathcal{T}$ een topologie is op X. Deze heet de *co-eindige* topologie op X. Laat zien dat de volgende uitspraken equivalent zijn:
   (a) X is eindig;
   (b) $(X, \mathcal{T})$ is Hausdorff;
   (c) $(X, \mathcal{T})$ is discreet.

(3) Zij X een topologische ruimte en S, T deelverzamelingen van X. Toon aan
   (a) $\overline{S \cup T} = \overline{S} \cup \overline{T}$;
   (b) $\overline{S} \backslash \overline{T} \subset \overline{S \backslash T}$;
   (c) $X \backslash \bar{S} = (X \backslash S)^\circ$;
   (d) $\partial S = \bar{S} \setminus S^\circ$.

(4) Zij (X, d) een metrische ruimte. Laat zien dat de volgende verzamelingen een basis vormen van de topologie $\mathcal{T}_d$.
   (a) $\{B_{1/n}(x) : x \in X, n \in \mathbf{Z}_{>0}\}$,
   (b) $\{B_\epsilon(x) : x \in X, \epsilon < \epsilon_0\}$, voor een $\epsilon_0 > 0$.

(5) Laat zien dat $\mathbf{R}^n$ met de Euclidische topologie een aftelbare basis heeft.

(6) Zij $(X, \mathcal{T})$ een Hausdorffse topologische ruimte en $x \in X$. Laat zien dat $\{x\}$ gesloten is in $(X, \mathcal{T})$.

(7) Zij $(X, \mathcal{T}_X)$ en $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische ruimten met $(X, \mathcal{T}_X)$ triviaal en $(Y, \mathcal{T}_Y)$ Hausdorff. Zij $f : X \to Y$ continu. Laat zien dat f constant is.

(8) Zij $(X, \mathcal{T})$ een topologische ruimte en $Z \subset X$. Bewijs dat

$$\mathcal{T}_{|Z} := \{U \cap Z \mid U \in \mathcal{T}\} \subset \mathcal{P}(Z)$$

een topologie is op Z. Deze topologie heet de door X *geïnduceerde* topologie op Z.

(9) Zij $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ een continue afbeelding van topologische ruimten. Zij $Z \subset X$ een deelverzameling en $\mathcal{T}_Z$ de door X geïnduceerde topologie op Z. Laat zien dat de beperking $f_{|Z} : Z \to Y$ continu is.

(10) Zij $\mathcal{B}$ een basis voor $(X, \mathcal{T}_X)$ en $Y \subset X$. Laat zien dat $\{U \cap Y : U \in \mathcal{B}\}$ een basis is voor de geïnduceerde topologie op Y.

(11) Laat zien dat $(0, 1)$ en $\mathbf{R}$ homeomorf zijn.