OPGAVEN WERKCOLLEGE TOPOLOGIE VAN 7 APRIL 2014

(1) (a) Zij $f\colon X \to Y$ een afbeelding tussen topologische ruimten. Zij $\mathcal{B}$ een basis voor de topologie op Y. Laat zien dat f continu is dan en slechts dan als voor alle $U \in \mathcal{B}$ de verzameling $f^{-1}(U)$ open is in X.
(b) Zij $\mathcal{B}_X$ en $\mathcal{B}_Y$ bases voor topologische ruimten X en Y respectievelijk. Laat zien dat $\{U \times V \mid U \in \mathcal{B}_X, V \in \mathcal{B}_Y\}$ een basis is voor de produkttopologie op $X \times Y$.

(2) Zij X een verzameling. Zij $\mathcal{T}_1$ en $\mathcal{T}_2$ topologieën op X. Zij $\mathcal{B}_1$ een basis voor $\mathcal{T}_1$ en $\mathcal{B}_2$ een basis voor $\mathcal{T}_2$. Neem aan dat voor alle $x \in X$ en voor alle $U_1 \in \mathcal{B}_1$ met $x \in U_1$ er een $U_2 \in \mathcal{B}_2$ is met $x \in U_2$ en $U_2 \subset U_1$, en omgekeerd, voor alle $x \in X$ en voor alle $U_2 \in \mathcal{B}_2$ met $x \in U_2$ is er een $U_1 \in \mathcal{B}_1$ is met $x \in U_1$ en $U_1 \subset U_2$. Bewijs dat $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.

(3) Laat zien dat de produkttopologie op $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ dezelfde is als de Euclidische topologie op $\mathbf{R}^2$. (Hint: gebruik opgave (2).)

(4) Zij X en Y discrete topologische ruimten. Laat zien dat $X \times Y$ discreet is.

(5) Zij X en Y niet-lege topologische ruimten. Neem aan dat $X \times Y$ compact is. Bewijs dat X en Y compact zijn.

(6) Zij X Hausdorff. Zij $A \subset X$ compact en $z \in X \setminus A$. Laat zien dat er open U en V in X zijn met $A \subset U$ en $z \in V$ en $U \cap V = \emptyset$. (Hint: kies voor alle $a \in A$ open verzamelingen $U_a \subset X$ en $V_a \subset X$ met $a \in U_a$ en $z \in V_a$ en $U_a \cap V_a = \emptyset$.)

(7) Zij X Hausdorff. Zij A en B disjuncte compacte deelverzamelingen van X. Bewijs dat er open deelverzamelingen U en V bestaan zodat $A \subset U$ en $B \subset V$ en $U \cap V = \emptyset$. (Hint: gebruik de vorige opgave)

(8) Zij X en Y topologische ruimten. Zij $X_1, X_2 \subset X$ gesloten zodat $X = X_1 \cup X_2$. Zij $f\colon X \to Y$ een functie zodat de restricties $f_{|X_1}\colon X_1 \to Y$ en $f_{|X_2}\colon X_2 \to Y$ continu zijn. Laat zien dat f continu is. (Hint: bewijs dat voor alle $F \subset Y$ gesloten $f^{-1}(F)$ gesloten is.)

(9) Zij $(X, \mathcal{T}_X)$ een topologische ruimte. Geef $X \times X$ de produkttopologie. Laat zien dat

$$\Delta = \{(x, x)\colon x \in X\}$$

gesloten is in $X \times X$ dan en slechts dan als X Hausdorff is.

(10) Zij $(X, \mathcal{T}_X)$ een topologische ruimte. Laat zien dat $X \times X$ Hausdorff is dan en slechts dan als X Hausdorff is.

(11) Zij $X = \{0, 1\}$ met de discrete topologie. Laat zien dat de produkttopologie op $\prod_{n=0}^{\infty} X$ *niet* discreet is (zonder gebruik te maken van de stelling van Tychonoff).