OPGAVEN WERKCOLLEGE TOPOLOGIE VAN 14 APRIL 2014

1. Definities

X heet *wegsamenhangend* als $X \neq \emptyset$ en voor alle $x_0, x_1 \in X$ er een continue afbeelding $\gamma\colon I \to X$ is met $\gamma(0) = x_0$ en $\gamma(1) = x_1$. (I staat voor $[0,1]$.)

We zeggen dat X *samenhangend* is als

$$\#\{f\colon X \to \{0,1\} \mid f \text{ continu }\} = 2.$$

(Met andere woorden: X is niet-leeg en elke continue afbeelding $X \to \{0,1\}$ is constant). Merk op dat $\{0,1\}$ de discrete topologie heeft.

Als $(X_i)_{i\in I}$ een collectie topologische ruimten is, dan is de *producttopologie* op $\prod_{i\in I} X_i$ de grofste topologie waarvoor alle projectie-afbeeldingen

$$\pi_n\colon \prod_{i\in I} X_i \to X_n$$

continu zijn.

2. Opgaven

(1) Zij $\gamma_1, \gamma_2\colon I \to Y$ continu met $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$. Laat zien dat

$$I \to Y, s \mapsto \begin{cases} \gamma_1(2s) & \text{als } s \leq 1/2 \\ \gamma_2(2s-1) & \text{als } s \geq 1/2 \end{cases}$$

continu is.

(2) Zij $n \geq 2$.
  (a) Zij $x \in \mathbf{R}$. Bewijs dat $\mathbf{R} \setminus \{x\}$ niet wegsamenhangend is;
  (b) Zij $x \in \mathbf{R}^n$. Bewijs dat $\mathbf{R}^n \setminus \{x\}$ wegsamenhangend is;
  (c) Bewijs dat $\mathbf{R}$ en $\mathbf{R}^n$ niet homeomorf zijn.

(3) Zij $n \geq 1$. Laat zien dat S^n wegsamenhangend is. (Hint, gebruik deel (b) van voorgaande opgave).

(4) Zij X en Y samenhangend. Laat zien dat $X \times Y$ met de producttopologie samenhangend is. (Hint: neem een continue functie $f\colon X \times Y \to \{0,1\}$. Laat zien dat voor alle $x \in X$ de functie $Y \to \{0,1\}\colon y \mapsto f(x,y)$ constant is. Laat zien dat voor alle $y \in Y$ de functie $X \to \{0,1\}\colon x \mapsto f(x,y)$ constant is. Concludeer dat f constant is.)

(5) Bewijs dat $\mathbf{Q}$ niet samenhangend is.

(6) Zij X, Y en Z topologische ruimten. Zij $f\colon Z \to X \times Y$ een afbeelding. Bewijs dat f continu is dan en slechts dan als $\pi_X \circ f\colon Z \to X$ en $\pi_Y \circ f\colon Z \to Y$ continu zijn.

(7) Zij X en Y niet-lege topologische ruimten. Bewijs dat $X \times Y$ wegsamenhangend is dan en slechts dan als X en Y wegsamenhangend zijn.

(8) Zij X een topologische ruimte en $A, B \subset X$ met $A \cap B$ niet leeg. Neem aan dat A en B wegsamenhangend zijn. Bewijs dat $A \cup B$ wegsamenhangend is.

(9) Zij X een topologische ruimte die slechts eindig veel samenhangende componenten heeft. Bewijs dat de samenhangende componenten clopen zijn.

(10) Geef voor elk van de volgende topologische ruimten de samenhangende componenten:

(a) $\mathbf{R}\backslash\mathbf{Z}$ (met de geïnduceerde topologie uit $\mathbf{R}$);

(b) een verzameling X met de triviale topologie;

(c) een verzameling X met de discrete topologie;

(d) de verzameling $X = \mathbf{R}$ met de co-eindige topologie (dus $U \subset X$ is open dan en slechts dan als $X\backslash U$ eindig of $U = \emptyset$);

(e) $X = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \in \mathbf{Z}$ of $y \in \mathbf{Z}\} \subset \mathbf{R}^2$;

(f) $\mathbf{Q}$;

(g) $\mathbf{R}^2 \setminus \mathbf{Q}^2$;

(11) Zij $X = \prod_{n\geq 0}\{0, 1\}$, met de producttopologie. Voor $n \geq 0$ en $s_0, \ldots, s_n \in \{0, 1\}$ definiëren we

$$B(s_0, s_1, \ldots, s_n) = \{(x_i)_{i\geq 0} \mid x_0 = s_0, \ldots, x_n = s_n\} \subset X.$$

Bewijs dat de deelverzamelingen $B(s_0, \ldots, s_n)$ een basis vormen voor de topologie op X. Bewijs dat X niet discreet is.

(12) Zij X en Z topologische ruimten, en neem aan dat X compact is. Zij $F \subset X \times Z$ gesloten. In deze opgave bewijzen we dat $\pi_Z(F)$ gesloten is.

(a) Zij $z \in Z\backslash\pi_Z(F)$. Laat zien dat voor alle $x \in X$ er open omgevingen $U_x \subset X$ van x en $V_x \subset Z$ van z bestaan zodat $(U_x \times V_x) \cap F = \emptyset$.

(b) Laat zien dat er $x_1, \ldots, x_n \in X$ zijn zodat $V_{x_1} \cap \cdots \cap V_{x_n} \cap \pi_Z(F) = \emptyset$.

(c) Concludeer dat $\pi_Z(F)$ gesloten is in Z.

(∗) Zij X Hausdorff en neem aan dat voor alle topologische ruimten Z en alle gesloten deelverzamelingen $F \subset X \times Z$ geldt dat $\pi_Z(F)$ gesloten is in Z. Bewijs dat X compact is.