Opgave 10.8

Stelling. *Beschouw de eenheidscirkel* S^1 *in het complexe vlak. Zij* $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$*. Definieer op* S^1 *de equivalentierelatie* $\sim$ *met* $z \sim w$ *dan en slechts dan als* $(z/w)^n = 1$*. Dan is* $\mathrm{S}^1/\!\sim$ *homeomorf met* S^1*.*

Bewijs. Zij $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ de continue functie gegeven door $z \mapsto z^n$. Deze functie beeldt S^1 af binnen S^1, dus f beperkt tot een continue functie $g\colon \mathrm{S}^1 \to \mathrm{S}^1$. Voor $z, w \in \mathrm{S}^1$ met $z \sim w$ geldt $(z/w)^n = 1$, oftewel $z^n = w^n$, dus $g(z) = g(w)$. Dus g induceert een continue functie $h\colon \mathrm{S}^1/\!\sim \to \mathrm{S}^1$ (universele eigenschap van quotiëntruimtes).

Andersom, $g(z) = g(w)$ impliceert $z \sim w$, dus h is injectief. Elk punt op S^1 heeft een n^{de}-machtswortel in S^1 (merk op $n \neq 0$) dus h is ook surjectief. De cirkel S^1 is compact en Hausdorff. Het quotiënt $\mathrm{S}^1/\!\sim$ is ook compact, als beeld van een compacte ruimte. Nu is h een continue bijectie van een compacte ruimte naar een Hausdorffse ruimte, dus h is een homeomorfisme. ■