De wiskunde achter de Bitcoin

Bas Edixhoven

Universiteit Leiden

NWD, Noordwijkerhout, 2015/01/31

Deze aantekeningen zal ik op mijn homepage plaatsen.

Een paar woorden over Bitcoin

Bitcoin is een digitale munt, gebaseerd op openbronprogramma's, functionerend zonder centrale autoriteit.

Alle details van hoe het werkt zijn openbaar (protocol, software).

Onderwerp van deze presentatie: de wiskundige ingrediënten in Bitcoin.

Dat zijn er twee:

- de SHA-256 hash functie.
- Elliptische Kromme Digitale Handtekening Algoritme (ECDSA),

De hash-functie wordt veelvuldig in het Bitcoin protocol gebruikt, het is een korte "vingerafdruk" (uittreksel) van een bestand van willekeurige lengte.

Met een handtekening bewijs je eigenaar te zijn van de Bitcoins die je uitgeeft.

Referenties

- https://en.bitcoin.it/wiki/Main_Page
- http://en.wikipedia.org/wiki/Hash_function
- http://en.wikipedia.org/wiki/Cryptographic_hash_function
- http://en.wikipedia.org/wiki/SHA-2
- http://en.wikipedia.org/wiki/Elliptic_curve_cryptography
- http://en.wikipedia.org/wiki/Elliptic_Curve_DSA

Globale werking van Bitcoin

- Alle transacties in Bitcoins worden opgeslagen in één bestand, het “kasboek” (ledger, block chain).
- Dit kasboek wordt in een “peer to peer” netwerk opgeslagen en bijgewerkt.
- Het bijwerken kost zoveel rekentijd dat er gemiddeld één keer per 10 minuten een blok bijkomt.
- Degene die een blok toevoegt krijgt een beloning (in Bitcoins, “mining”).
- Gewone gebruikers hoeven alleen een app op hun smartphone te zetten om transacties uit te voeren.

Enige aspecten van Bitcoin

- Wiskunde: SHA-256, ECDSA.
- Informatica: “peer to peer” netwerk, programmacode.
- Cryptologie: studie van mogelijke zwakten van het protocol.
- Gebruik: er zijn apps voor op de smartphone om transacties te doen.
- Belasting: wat vindt de belastingdienst ervan?

In deze presentatie: alleen het wiskundig aspect.

Cryptografische hash-functies

Het zijn functies $H\colon \mathbb{N} \to \{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$, n is de lengte van H.

De lengte van SHA-256 is 256.

Denk aan natuurlijke getallen als bit-strings (tweetallig stelsel) van willekeurige lengte.

Een cryptografische hash-functie H is snel uit te rekenen en moet "praktisch injectief" en "praktisch niet inverteerbaar" zijn. Dat betekent:

- gegeven y in $\{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$ is het praktisch ondoenlijk een x in $\mathbb{N}$ te vinden met $H(x) = y$,
- gegeven x in $\mathbb{N}$ is het praktisch ondoenlijk een $x' \neq x$ in $\mathbb{N}$ te vinden met $H(x') = H(x)$,
- het is praktisch ondoenlijk een x en $x' \neq x$ te vinden met $H(x') = H(x)$.

SHA-256 is een voorbeeld: niet één "collision" bekend! ($2^{128} > 10^{38}$.)

Toepassing: integriteit van electronische bestanden.

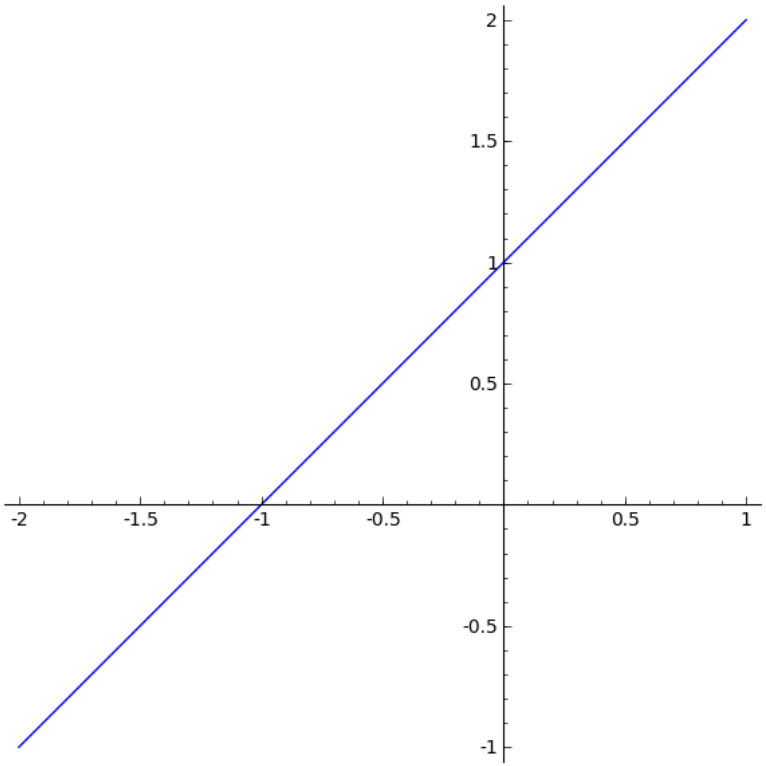
Hoe werkt SHA-256?

Details: `http://en.wikipedia.org/wiki/SHA-2`

- De input-string wordt aangevuld, waarna de lengte een veelvoud van 512 is.
- De aangevulde input wordt in stukken van $512 = 16 \cdot 32$ bits gehakt.
- Één voor één worden de stukken verwerkt (rotate, shift, xor) tot 64 stukken van 32 bits,
- en weer samen met het resultaat van de voorgaande stukken samengeperst (rotate, xor, + modulo 2^{32}) tot 256 bits.

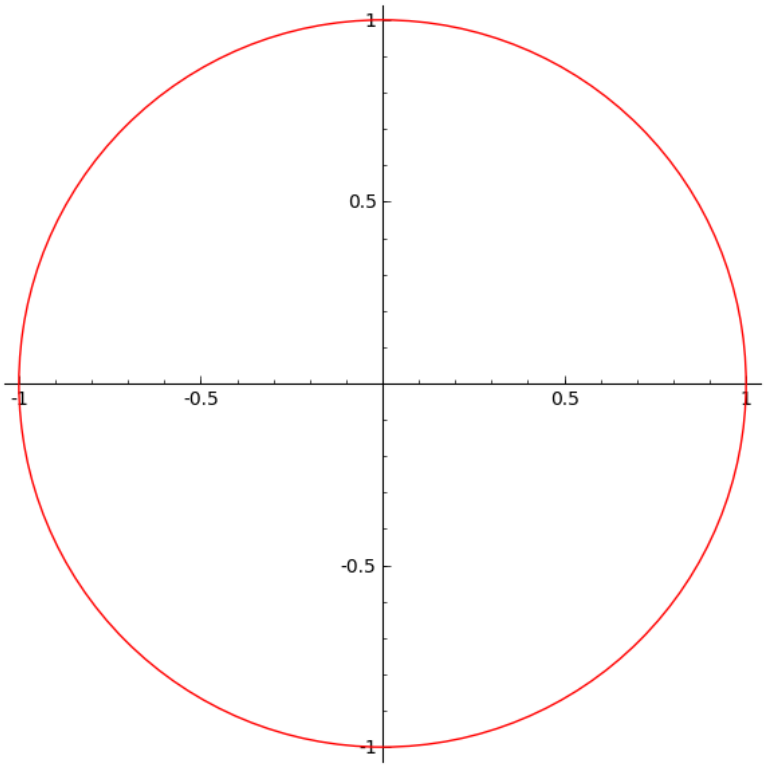
Elliptische kromme digitale handtekening algoritme

Terug naar René Descartes (1630). Een vlakke kromme van graad 1



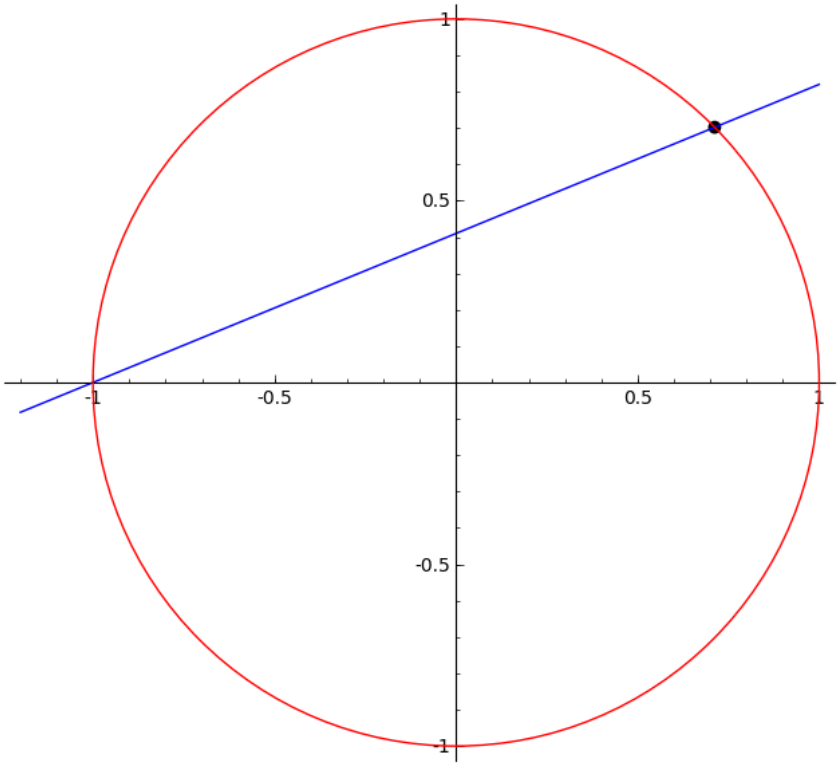
De lijn gegeven door de vergelijking $y = x + 1$.

Een vlakke kromme van graad 2



De cirkel gegeven door de vergelijking $x^2 + y^2 = 1$.

Algebraïsche parametrisatie van de cirkel



Lijnen door $(-1, 0)$:

$$y = a \cdot (x + 1).$$

Tweede snijpunt:

$$\left(\frac{1 - a^2}{1 + a^2}, \frac{2a}{1 + a^2} \right)$$

$$\mathbb{R} \to \text{cirkel}, \quad a \mapsto \left(\frac{1 - a^2}{1 + a^2}, \frac{2a}{1 + a^2} \right).$$

Elliptische krommen zijn van graad 3

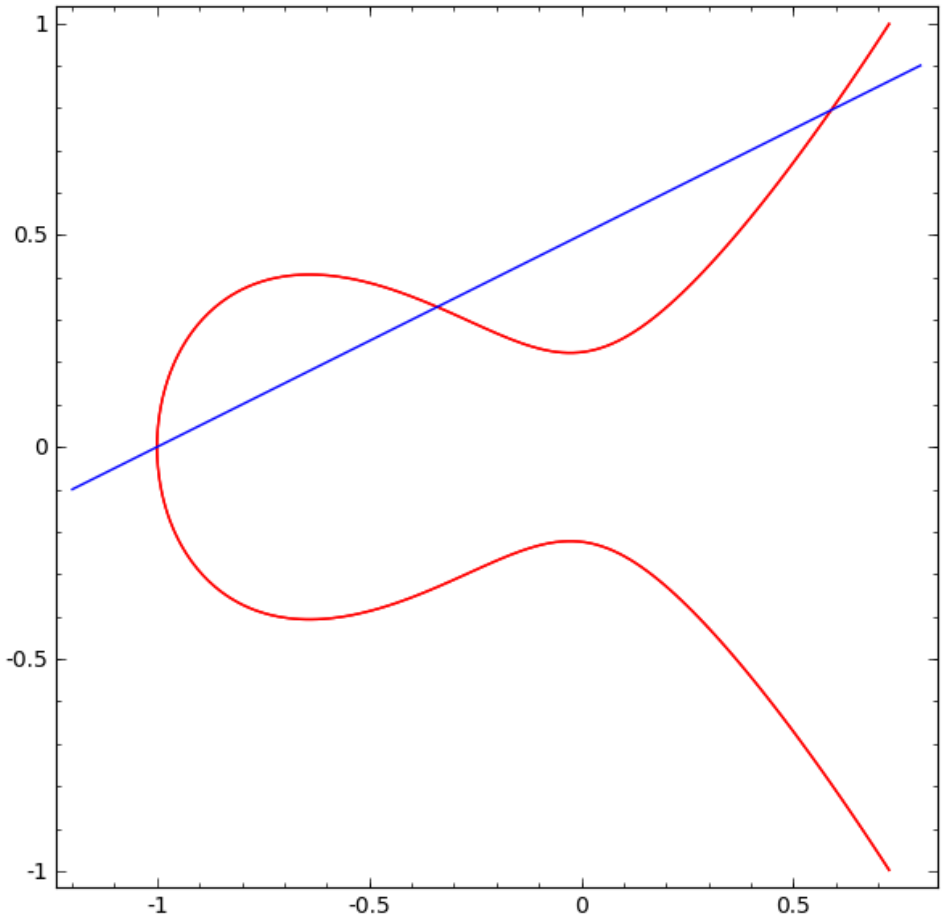
Vergelijking:

$$y^2 = (x+1)(x^2+0.05).$$

$E(\mathbb{R})$ is de verzameling oplossingen (x, y) in $\mathbb{R}^2$.

Lijnen snijden $E(\mathbb{R})$ in 1 of 3 punten...

als we met multipliciteiten tellen *en* een punt “op oneindig” toevoegen.



Dit is projectieve meetkunde.

Parallelle lijnen snijden
op de horizon.

$E(\mathbb{R})$ heeft één punt "O"
op de horizon.

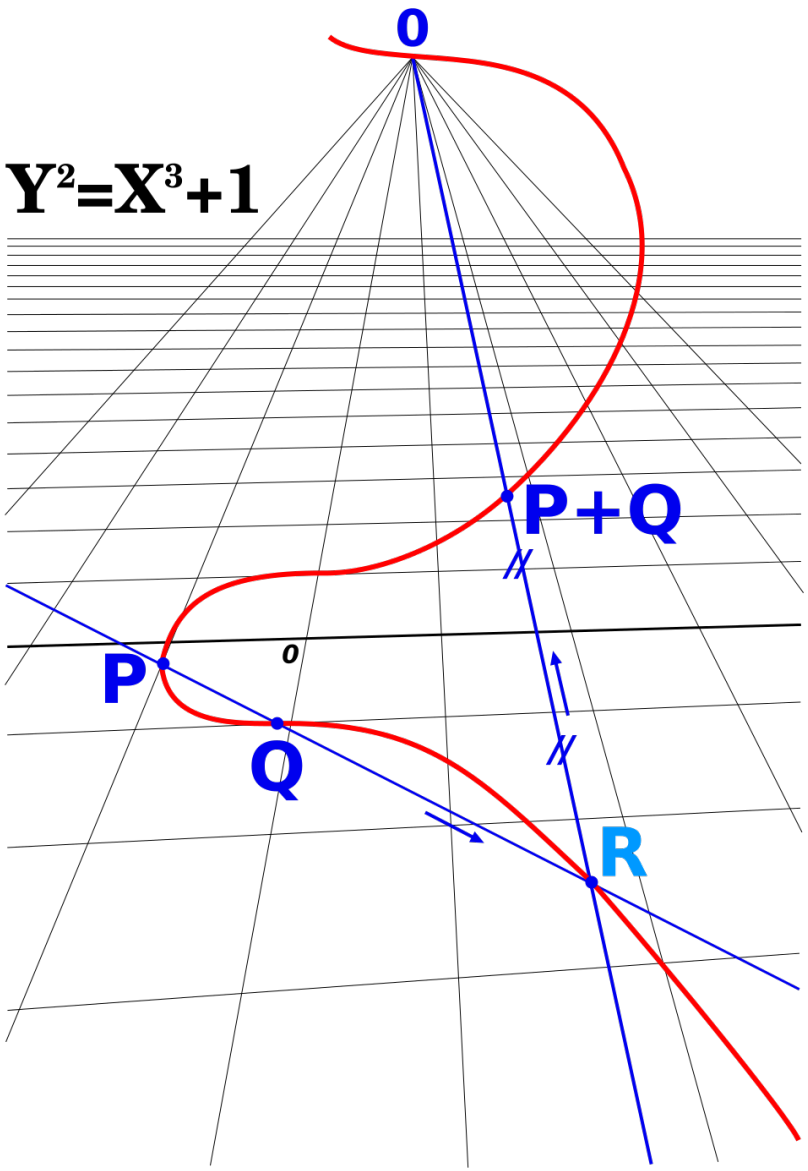
$E(\mathbb{R})$ heeft géén algebraïsche
parametrisering.

Maar $E(\mathbb{R})$ (inclusief O) heeft
een *binaire operatie*:

$$E(\mathbb{R}) \times E(\mathbb{R}) \to E(\mathbb{R}),$$

$$(P, Q) \mapsto P + Q.$$

(Maker van het plaatje: Jean Brette.)



Groepsstructuur

Deze binaire operatie maakt van $E(\mathbb{R})$ een *commutatieve groep*.
Voor alle P en Q in $E(\mathbb{R})$:

$$Q + P = P + Q.$$

Voor alle P in $E(\mathbb{R})$:

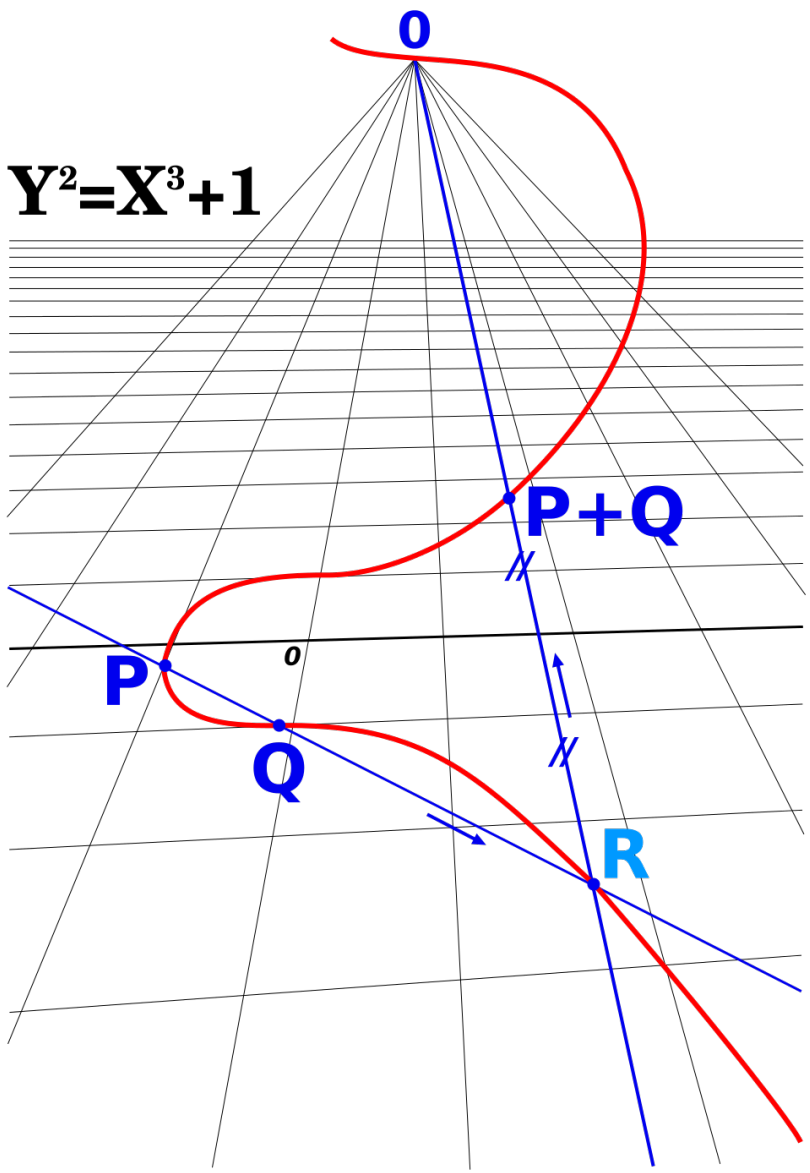
$$P + O = P.$$

Voor alle P is er een Q zodat:

$$P + Q = O.$$

Voor alle P, Q en R in $E(\mathbb{R})$:

$$P + (Q + R) = (P + Q) + R.$$



De groepsoperatie is algebraïsch

De coördinaten van $P + Q$ zijn te krijgen uit die van P en Q d.m.v. de operaties $+$, $-$, $\cdot$, $/$ en de coëfficienten van de vergelijking van E.

Dus we kunnen $\mathbb{R}$ vervangen door ieder getalsysteem met deze operaties, die aan de gebruikelijke eigenschappen voldoen: lichamen.

Voorbeelden: $\mathbb{Q}$ (rationale getallen), $\mathbb{C}$ (complexe getallen), maar ook *eindige lichamen*.

Het lichaam $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$, met rekenen met resten na deling door 2:

$$1 + 1 = 0, \quad \text{want “oneven plus oneven is even”.}$$

De lichamen $\mathbb{F}_p$

Laat p een priemgetal zijn. Dan noteren we $\mathbb{F}_p = \{0, \ldots, p-1\}$.

We definiëren optelling en vermenigvuldiging op $\mathbb{F}_p$ door dezelfde operatie in $\mathbb{Z}$ te doen, en vervolgens de rest te nemen na deling door p.

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p &\to \mathbb{Z} \to \mathbb{F}_p \\ (a, b) &\mapsto a + b \mapsto (a + b) \bmod p \\ (a, b) &\mapsto a \cdot b \mapsto (a \cdot b) \bmod p. \end{aligned}$$

Voorbeeld: in $\mathbb{F}_{13}$ hebben we $10 + 7 = 17 \bmod 13 = 4$, en ook $10 \cdot 7 = 70 \bmod 13 = 5$.

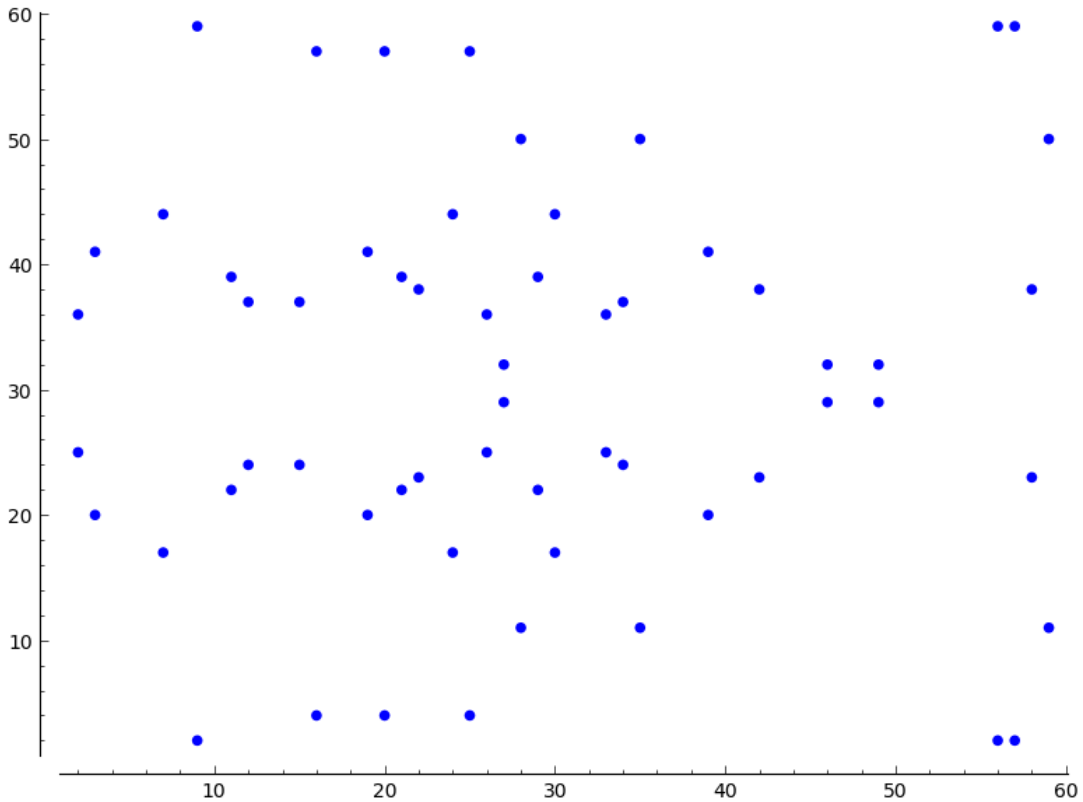
Deze optelling en vermenigvuldiging hebben de gebruikelijke eigenschappen, en omdat p een priemgetal is, kunnen we ook delen door elke $a \neq 0$ in $\mathbb{F}_p$.

In $\mathbb{F}_{13}$ hebben we $1/2 = 7$ (want $2 \cdot 7 = 14 = 1 + 13$), $1/3 = 9$ (want $3 \cdot 9 = 27 = 1 + 2 \cdot 13$), etc.

Elliptische krommen over $\mathbb{F}_p$

Voor p priem en E een elliptische kromme $y^2 = x^3 + ax + b$ met a en b in $\mathbb{F}_p$ is $E(\mathbb{F}_p)$ een eindige commutatieve groep, waarvan het aantal elementen $\#E(\mathbb{F}_p)$ efficiënt is uit te rekenen (René Schoof, 1983).
Voorbeeld: de elliptische kromme $y^2 = x^3 + 7$ over $\mathbb{F}_{61}$:

$$E(\mathbb{F}_{61}) =$$



$$\cup \{O\}$$

Bitcoins elliptische kromme

Bitcoin gebruikt $p = 2^{256} - 2^{32} - 2^9 - 2^8 - 2^7 - 2^6 - 2^4 - 1$, $a = 0$ en $b = 7$.

$$p = 115792089237316195423570985008687907853269984665640564039457584007908834671663.$$

Dit is “secp256k1” van de Standards for Efficient Cryptography Group, een internationaal consortium opgericht in 1998 om commerciële standaarden voor efficiënte ECC te ontwikkelen.

$$n := \#E(\mathbb{F}_p) = 115792089237316195423570985008687907852837564279074904382605163141518161494337.$$

Dit aantal n is ook een priemgetal, en dat is belangrijk. We hebben dus ook het eindige lichaam $\mathbb{F}_n$. In secp256k1 is ook een $G \neq O$ in $E(\mathbb{F}_p)$ gespecificeerd.

ECDSA: Sleutelparen

Laat p, E, en G als boven. Dan is de afbeelding

$$\mathbb{F}_n \to E(\mathbb{F}_p), \quad d \mapsto d \cdot G = G + \cdots + G \quad (d \text{ termen})$$

bijectief: voor iedere Q in $E(\mathbb{F}_p)$ is er precies één d in $\mathbb{F}_n$ met $d \cdot G = Q$.

Alice maakt een geheime sleutel door een random element d_A in $\mathbb{F}_n$ te kiezen.

Haar publieke sleutel is dan het punt $Q_A := d_A \cdot G$ in $E(\mathbb{F}_p)$. Dit kan snel worden uitgerekend: ongeveer 500 rekenstappen.

Het snelst nu bekende algoritme om uit Q_A weer d_A te bepalen kost ongeveer $2^{128} \cong \sqrt{n}$ rekenstappen. Dat is al 30 jaar zo. Dit kost 1079028307080 jaar met een botnet van 10^9 computers van elk 10 GHz.

Die aanval is gebaseerd op de “birthday paradox”. Het is een “generiek” algoritme: maakt geen gebruik van specifieke eigenschappen van elliptische krommen.

Toepassing ECDSA in Bitcoin

Als Bob een bedrag van x Bitcoin moet betalen aan Alice, dan maakt Bob deze x Bitcoin over naar het Bitcoinadres Q_A door deze transactie naar het Bitcoin-netwerk te sturen.

De transactie komt in het eerste nieuwe blok van het kasboek, zichtbaar voor Alice en Bob (en iedereen!).

Als Alice deze x Bitcoins, of een deel daarvan, weer wil uitgeven heeft ze haar geheime sleutel d_A nodig.

ECDSA: ondertekenen

Hoe ondertekent Alice een boodschap m: maak x Bitcoins over van het adres Q_A naar een adres Q_Z?

Ze kiest een random k in $\mathbb{F}_n$, en berekent r en s in $\mathbb{F}_n$ gedefinieerd door:

$$r = f(x(k \cdot G)), \quad \text{waar} \quad f : \mathbb{F}_p \to \mathbb{F}_n, \quad a \mapsto a \bmod n,$$

$$s = k^{-1} \cdot (h(m) + d_A \cdot r), \quad \text{waar} \quad h(m) = H(H(m)) \bmod n,$$

hierbij is H de hash-functie SHA-256.

De handtekening is dan (r, s).

Over veiligheid en betekenis van zo'n handtekening straks meer.

ECDSA: controle van de handtekening

Voor willekeurige r, s, en k in $\mathbb{F}_n - \{0\}$ zijn equivalent:

- $s = k^{-1} \cdot (h(m) + d_A \cdot r)$,
- $k = s^{-1} \cdot (h(m) + d_A \cdot r)$,
- $k \cdot G = s^{-1} \cdot (h(m) + d_A \cdot r) \cdot G$,
- $k \cdot G = s^{-1} \cdot (h(m) \cdot G + r \cdot Q_A)$,

en deze laatste gelijkheid impliceert:

$$f(x(k \cdot G)) = f(x(s^{-1} \cdot (h(m) \cdot G + r \cdot Q_A))).$$

De vraag is dus of voor het paar (r, s) van Alice r (gedefinieerd als $f(x(k \cdot G))$) en $f(x(s^{-1} \cdot (h(m) \cdot G + r \cdot Q_A)))$ gelijk zijn. De input voor deze berekening bestaat uit publieke data.

ECDSA: veiligheid

Het best nu bekende algoritme om handtekeningen als boven (256 bit ECDSA) te vervalsen kost ongeveer 2^{128} rekenstappen.

Er is geen wiskundig bewijs dat er geen snellere aanvallen zijn.

Cryptologen hebben praktische digitale handtekeningen ontwikkeld waarvan de veiligheid wel bewezen is (onder onbewezen “standaard cryptografische aannames”), zelfs tegen quantumcomputers.

Onder dat soort aannamen kunnen we dus vertrouwen hebben in:

authenticiteit, Alice heeft ondertekend, of haar geheime sleutel is uitgelekt,

integriteit, wat ze ondertekende is precies m, de boodschap is niet veranderd,

onweerlegbaarheid, Alice kan haar handtekening niet ontkennen, tenzij ze haar geheime sleutel herroepen had vóór de tijd van ondertekening.

Praktijk, conclusies

- De gebruiker van Bitcoin heeft programma's (apps) die de nodige berekeningen doen.
- Omdat het openbronprogramma's zijn kunnen we de werking ervan controleren.
- De wiskunde in het Bitcoin protocol berust op eeuwenoude wiskundige concepten (modulo-rekenen, elliptische krommen, eindige lichamen) en stellingen op niveau van een masteropleiding in algebra, meetkunde en getaltheorie.
- Ook banken gebruiken ECDSA en SHA-256. Als nodig kunnen de parameters worden aangepast.
- Er zijn nu digitale handtekeningen waarvan veiligheid onder duidelijke aannamen is bewezen (wiskundige stellingen van cryptologen, op onderzoeksniveau).
- Expertise in Nederland. CWI (Cramer), RUN (Bosma, Verheul), TUe (Bernstein, Lange, Schoenmakers, de Weger), UL (Edixhoven, Lenstra, Stevenhagen).