Op zoek naar goede ABC-hits (1)

Jaap Top

(aantekeningen: Arjen Stolk)

Een drietal positieve gehele getallen a, b en c heet een ABC-drietal als a en b onderling ondeelbaar zijn, a kleiner is dan b en c de som is van a en b. Zo'n drietal heet een ABC-hit als c groter is dan $\mathrm{rad}(abc)$.

Het *formaat* van een ABC-hit is $\log(c)/\log(10)$, grofweg het aantal cijfers van c. De *kwaliteit* van een hit is het getal $\log(c)/\log(\mathrm{rad}(abc))$, dat aangeeft hoe veel groter c is dan de radicaal. Een *goede* ABC-hit is een hit waarvan de kwaliteit tenminste 1.4 is.

Er zijn op dit moment zo'n 200 goede hits bekend. Benne de Weger was de eerste die een lijst opstelde, daarop stonden er ongeveer 80. In de jaren daarna werden er gestaag meer gevonden, zo'n 5 of 6 per jaar. Dit was een beetje verontrustend, aangezien het ABC-vermoeden voorspelt dat er maar eindig veel zijn. In 2000/2001 kwam er een einde aan deze groei en gedurende een paar jaar werden er geen nieuwe goede hits gevonden. In 2003 kwam Tim Dokchitser met een nieuwe methode om goede hits te zoeken en hij vond 41 nieuwe. De best bekende kwaliteit voor een hit is $1.6299\ldots$ en het grootst bekende formaat voor een goede hit is $26.31\ldots$.

Hoe vind je nu een hit van goede kwaliteit? We bekijken de kleinste bekende goede hit, $3+125=128$. We kunnen dit herschrijven als $3+5^3=2^7$ of $3+5^3=2\cdot 4^3$. Merk op dat in deze laatste schrijfwijze de exponenten gelijk zijn. De gelijkheid die we hebben zegt dat 5^3 ongeveer twee keer zo groot is als 4^3, ofwel dat $\left(\frac{5}{4}\right)^3$ ongeveer 2 is. Dit betekent dat $\frac{5}{4}$ een redelijke benadering is van $\sqrt[3]{2}$.

Om goede benaderingen van machtswortels te vinden, kunnen we gebruik maken van de kettingbreukontwikkeling van zo'n getal. Zo begint de kettingbreuk van $\sqrt[3]{2}$ met

$$1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\ldots}}}.$$

De 5 die hier als laatste staat is tamelijk groot vergeleken met de getallen er voor. Dit betekent dat de benadering die we krijgen door *voor* deze 5 af te kappen een betrekkelijk goede is. Doen we dit dan krijgen we inderdaad de benadering $\frac{5}{4}$ voor $\sqrt[3]{2}$.

Een ander voorbeeld wordt gegeven door de kettingbreuk van $\sqrt[5]{109}$. Deze begint met

$$2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\text{groot}}}}}.$$

Kappen we af voor het grote getal, dan vinden we $\frac{23}{9}$ als benadering voor $\sqrt[5]{109}$. We berekenen $23^5-109\cdot 9^5=2$. Het drietal dat we vinden is het drietal met de best bekende kwaliteit en is ontdekt door Eric Reyssat.

Met deze methode vinden we altijd drietallen waarvan één van de getallen veel kleiner is dan de andere twee. De methode van Tim Dokchitser, die we nu gaan beschrijven, levert drietallen op waarvan alle drie de getallen ongeveer even groot zijn. Met behulp van deze methode zijn niet zozeer hits van bijzonder hoge kwaliteit gevonden, maar wel hits van een zeer groot formaat.

Het idee van deze methode is om grote priemfactoren te vermeiden. We beginnen met drie onderling ondeelbare gehele getallen n_1, n_2 en n_3 die kleiner dan een bovengrens N zijn, maar daar niet al te ver vanaf liggen. We kiezen deze drie getallen zo dat ze alledrie een kleine radicaal hebben (dus ze bestaan uit kleine priemgetallen tot hoge machten). Vervolgens proberen we kleine gehele getallen a_1, a_2 en a_3 te vinden zodat $a_1n_1 + a_2n_2 + a_3n_3 = 0$. Dit geeft ons dan een drietal waarvan we hopen dat het goed is.

Hoe vinden we nu zulke a's? Kies een bovengrens B (we zullen zo zien welke B we moeten kiezen) en beschouw uitdrukkingen van de vorm $b_1n_1 + b_2n_2 + b_3n_3$ voor gehele b_i uit $\{1, 2, \ldots, B\}$. Er zijn B^3 van deze uitdrukkingen. Ze zijn allemaal van boven begrensd door $3BN$. Zodra dus $B^3 > 3BN$ zullen er zeker twee van deze uitdrukkingen dezelfde waarde hebben. Dit gebeurt als $B > \sqrt{3N}$. Stel nu dat $b_1n_1 + b_2n_2 + b_3n_3$ en $c_1n_1 + c_2n_2 + c_3n_3$ dezelfde waarde hebben. Dan is $a_i = b_i - c_i$ een oplossing voor ons probleem, waarbij de a_i's in absolute waarde hoogstens $B = \sqrt{3N}$ zijn.

Waarom verwachten we dat dit (goede) ABC-hits geeft? Wat we willen voor een hit is dat $c > \mathrm{rad}(abc)$, oftewel dat

$$\max_i |a_in_i| > \mathrm{rad}(a_1n_1 \cdot a_2n_2 \cdot a_3n_3).$$

De linkerkant van deze uitdrukking is bij benadering gelijk aan $\sqrt{3N} \cdot N$. De rechterkant is gelijk aan $\mathrm{rad}(n_1n_2n_3)\mathrm{rad}(a_1a_2a_3)$. De eerste factor is vrij klein kunnen we constant houden als we N naar ∞ sturen. De tweede factor is begrensd door $(\sqrt{3N})^3$. We zien dat als $N \to \infty$ de kwaliteit van onder begrensd is door iets dat naar 1 nadert. Als we dus geluk hebben vinden we ook drietallen met goede kwaliteit.

De bovenstaande methode om de a's te vinden volstaat voor een analyse van de methode, maar als we daadwerkelijk drietallen willen zoeken met een computer, kunnen we er beter iets anders naar kijken. De a's die voldoen vormen een rooster

$$\left\{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbf{Z}^3 | a_1n_1 + a_2n_2 + a_3n_3 = 0\right\}.$$

We zijn op zoek naar korte vectoren in dit rooster. Een bekend algorithme hiervoor is het LLL-algorithme. Hiervoor hebben we wel een basis van het rooster nodig. Dit is tamelijk eenvoudig te vinden. Voor de eerste basisvector nemen we bijvoorbeeld $(0, n_3, -n_2)$ en voor de tweede $(1, x, y)$ voor zekere gehele x en y. Deze getallen kunnen we uitrekenen met behulp van het Euclidisch algorithme.