Hertentamen Lineaire algebra 1 NA

Donderdag 26 januari 2023, 14.15–17.15

Laat zien hoe je aan je antwoorden komt. Het gebruik van rekenmachine, telefoon, boek of aantekeningen is niet toegestaan. Het cijfer is 1 + (aantal punten)/10.

(12 pt) **1.** (a) Bereken de hoek tussen de vectoren $\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$ in $\mathbf{R}^4$.

(b) Bereken de oppervlakte van de driehoek in $\mathbf{R}^3$ met hoekpunten

$$(1,2,3), \quad (3,3,5), \quad (2,2,2).$$

(16 pt) **2.** (a) Bepaal een basis voor de lineaire deelruimte van $\mathbf{R}^4$ opgespannen door de vectoren

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(b) We schrijven V voor de verzameling van alle vectoren $\mathbf{v} = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ waarvoor geldt $z^2 = x^2 - y^2$. Is V een lineaire deelruimte van $\mathbf{R}^3$? Waarom wel/niet?

(12 pt) **3.** Bepaal voor elke $a \in \mathbf{R}$ de kern (= nulruimte) van de matrix

$$M_a = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & a & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

(16 pt) **4.** De matrix

$$R = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

is de standaardmatrixrepresentatie van de rotatie over een hoek α om een lijn L door de oorsprong in $\mathbf{R}^3$ (dit hoef je niet te bewijzen).

(a) Bepaal de lijn L.

(b) Bepaal de standaardmatrixrepresentatie van de rotatie over 2α om de lijn L.

Opgaven 5 en 6 staan op de achterkant.

(*18 pt*) **5.** Gegeven is de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

(a) Bepaal de eigenwaarden van A en de bijbehorende eigenruimten.

(b) Bepaal functies $x = x(t)$, $y = y(t)$ die voldoen aan

$$\begin{cases} x'(t) = 4x(t) + 2y(t), \\ y'(t) = -3x(t) - 3y(t), \end{cases} \qquad \begin{cases} x(0) = 3, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

(*16 pt*) **6.** Bekijk de lineaire deelruimte W van $\mathbf{R}^4$ opgespannen door de vectoren

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bepaal een orthonormale basis voor W.

(b) Bereken de orthogonale projectie van de vector $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ op W.

Succes!

Bij dit tentamen mag de volgende tabel gebruikt worden.

t	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π
$\sin t$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos t$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1