

Tentamen Lineaire Algebra 1 NA

Vrijdag 6 januari 2023, 13.00–16.00

Laat zien hoe je aan je antwoorden komt. Het gebruik van rekenmachine, telefoon, boek of aantekeningen is niet toegestaan. Het cijfer is $1 + (\text{aantal punten})/10$.

(14 pt) 1. (a) Bepaal de dimensie van de lineaire deelruimte van \mathbf{R}^4 opgespannen door de vectoren

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(b) Bepaal voor elke $a \in \mathbf{R}$ de rang van de matrix

$$\begin{pmatrix} a & 2-a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(20 pt) 2. (a) Bereken de oppervlakte van het parallellogram in \mathbf{R}^3 met hoekpunten

$$(1, 0, 1), \quad (2, 2, 4), \quad (5, 3, 6), \quad (4, 1, 3).$$

(b) Bereken de determinant van de matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(18 pt) 3. De matrix

$$P = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

is de standaardmatrixrepresentatie van de orthogonale projectie op een vlak V door de oorsprong in \mathbf{R}^3 (dit hoef je niet te bewijzen).

(a) Bepaal het orthogonaal complement van V .

(b) Bepaal de standaardmatrixrepresentatie van de spiegeling in V .

(18 pt) 4. Gegeven is de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 8 & -5 \end{pmatrix}.$$

(a) Geef een diagonaalmatrix D en een inverteerbare matrix C met $A = CDC^{-1}$.

(b) Bepaal functies $x = x(t)$, $y = y(t)$ die voldoen aan

$$\begin{cases} x'(t) = 5x(t) - 3y(t), \\ y'(t) = 8x(t) - 5y(t), \end{cases} \quad \begin{cases} x(0) = 1, \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

Opgave 5 staat op de achterkant.

(20 pt) 5. Bekijk de lineaire deelruimte W van \mathbf{R}^4 opgespannen door de vectoren

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Bepaal een orthonormale basis voor W .
- (b) Bepaal de matrix van de orthogonale projectie op W .
- (c) Bereken de orthogonale projectie van de vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ op W .

Succes!