Voorbeelduitwerkingen toets Lineaire algebra 1 NA

Maandag 24 oktober 2022, 9.00–11.00

(10 pt) **1.** (a) We berekenen

$$\|\mathbf{v}\|^2 = 4^2 + 0^2 + 1^2 + (-1)^2 = 18, \quad \|\mathbf{w}\|^2 = 2^2 + (-2)^2 + 1^2 + 0^2 = 9,$$
$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 4(2) + 0(-2) + 1(1) + (-1)0 = 9.$$

Dit geeft

$$\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\|} = \frac{9}{\sqrt{18 \cdot 9}} = \frac{9}{9\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

De hoek is dus

$$\angle(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{4}\pi.$$

(b) Een vector $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ staat loodrecht op zowel $\mathbf{v}$ als $\mathbf{w}$ precies wanneer $\mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = 0$ en $\mathbf{w} \cdot \mathbf{x} = 0$, oftewel

$$\begin{cases} 4x_1 \phantom{{}-2x_2} + x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 \phantom{{}-x_4} = 0. \end{cases}$$

Een oplossing van dit stelsel is $\mathbf{x} = (1, 1, 0, 4)$ (dit kan ook systematisch door het stelsel in rijtrapvorm te zetten).

(10 pt) **2.** (a) We schrijven A voor de aangevulde matrix behorend bij dit stelsel en brengen A in rijtrapvorm:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & a & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1 \\ R_3 \leftarrow R_3 - R_1 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & a-2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \qquad R_2 \leftrightarrow R_3$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & a-2 & 0 \end{array}\right) \qquad R_3 \leftarrow R_3 + 5R_2$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & a-12 & 0 \end{array}\right).$$

Deze matrix staat in rijtrapvorm.

(a) Er is geen waarde van a waarvoor er een spil in de constantenkolom staat, dus er is geen waarde van a waarvoor het stelsel geen oplossingen heeft.

(b) Voor $a \neq 12$ staan er spillen in alle kolommen van de coëfficiëntenmatrix en heeft het stelsel precies één oplossing.

(c) Voor $a = 12$ bestaat de onderste rij uit nullen en is z een vrije variabele; er zijn voor $a = 12$ dus oneindig veel oplossingen.

(10 pt) **3.** (a) Door naar de vectoren te kijken, zien we dat $\mathbf{v}_4 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$, dus een lineaire relatie is $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4 = \mathbf{0}$. Dit laat zien dat $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ lineair afhankelijk is.

Alternatieve oplossing: in het college hebben we gezien dat er in een lineaire deelruimte die wordt opgespannen door l vectoren alleen een lineair onafhankelijk k-tal vectoren bestaat wanneer $k \leq l$. Aangezien $\mathbf{R}^3$ wordt opgespannen door 3 vectoren, bevat een lineair onafhankelijk rijtje vectoren in $\mathbf{R}^3$ hooguit 3 vectoren, dus elk 4-tal vectoren is lineair afhankelijk.

(b) De matrix met kolommen $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ is

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Deze matrix staat in rijtrapvorm en elke kolommen bevat een spil. Hieruit volgt dat $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ een basis van $\mathbf{R}^3$ is.

(10 pt) **4.** (a) We vegen de aangevulde matrix $(A \mid I)$:

$$\begin{aligned}
(A \mid I) = &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad R_1 \leftrightarrow R_2 \\
\sim &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1 \\
\sim &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad R_2 \leftrightarrow R_3 \\
\sim &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 2 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \qquad R_3 \leftarrow R_3 + 2R_2 \\
\sim &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right).
\end{aligned}$$

De matrix staat nu in rijtrapvorm, maar links van de streep staat geen spil in kolom 3. Dit laat zien dat A niet inverteerbaar is.

(b) We vegen de aangevulde matrix $(B \mid I)$:

$$
\begin{aligned}
(B \mid I) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) && R_1 \leftrightarrow R_2 \\
&\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) && R_2 \leftarrow R_2 - 3R_1 \\
&\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -12 & 3 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) && R_2 \leftrightarrow R_3 \\
&\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -12 & 3 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right) && R_3 \leftarrow R_3 + 6R_2 \\
&\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -3 & 6 \end{array}\right) && R_3 \leftarrow \tfrac{1}{3}R_3 \\
&\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -1 & 2 \end{array}\right) && R_1 \leftarrow R_1 + R_3 \\
&\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 0 & 1/3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -1 & 2 \end{array}\right) && R_2 \leftarrow \tfrac{1}{2}R_2 \\
&\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 0 & 1/3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -1 & 2 \end{array}\right) && R_1 \leftarrow R_1 - 6R_2 \\
&\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -1 & 2 \end{array}\right).
\end{aligned}
$$

Links van de streep staat nu de eenheidsmatrix, dus B is inverteerbaar met inverse

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(5 pt) **4.** We gaan alle eisen voor een lineaire deelruimte na:

- De nulvector ligt in V, want $0 = 2 \cdot 0 - 3 \cdot 0$.
- Als $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ en $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ twee vectoren in V zijn, dan geldt $v_3 = 2v_1 - 3v_2$ en $w_3 = 2w_1 - 3w_2$, dus ook $v_3 + w_3 = 2(v_1 + w_1) - 3(v_2 + w_2)$. Dit laat zien dat $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ in V ligt.
- Voor $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in V$ en $c \in \mathbf{R}$ geldt $v_3 = 2v_1 - 3v_2$, dus ook $cv_3 = 2(cv_1) - 3(cv_2)$. Dit laat zien dat $c\mathbf{v}$ in V ligt.

Dit laat zien dat V inderdaad een lineaire deelruimte van $\mathbf{R}^3$ is.