Voorbeelduitwerkingen tentamen Lineaire Algebra 1 NA

Vrijdag 6 januari 2023, 13.00–16.00

(*Opmerking:* bij het matrixvegen is de notatie voor de veegstappen weggelaten; geef deze bij een tentamen wel aan in je uitwerkingen!)

(14 pt) **1.** (a) We zetten de vectoren in een matrix en vegen deze naar rijtrapvorm:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De eerste en tweede kolom bevatten een spil, dus $\mathbf{v}_1$ en $\mathbf{v}_2$ vormen een basis voor de kolomruimte. De gegeven lineaire deelruimte heeft dus dimensie 2.

(b) We vegen de matrix naar rijtrapvorm, waarbij we eerst de rijen verwisselen en daarna de eerste rij $-a$ maal bij de tweede optellen:

$$\begin{pmatrix} a & 2-a \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & 2-a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2-2a \end{pmatrix}.$$

De matrix staat in rijtrapvorm, waarbij er voor $a = 1$ één spilkolom is en voor $a \neq 1$ twee. De matrix heeft dus rang 1 voor $a = 1$ en rang 2 voor $a \neq 1$.

(20 pt) **2.** (a) De zijden van dit parallellogram worden gegeven door de vectoren $\mathbf{v} = (2,2,4) - (1,0,1) = (1,2,3)$ en $\mathbf{w} = (4,1,3) - (1,0,1) = (3,1,2)$. Het kruisproduct is

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1, 7, -5).$$

De oppervlakte van het parallellogram is dus

$$\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\| = \sqrt{1^2 + 7^2 + (-5)^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}.$$

(b) We berekenen de determinant door te vegen:

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= -\det \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= 3\det \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & -2 \end{pmatrix} = 3\det \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= -6 \det \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 6 \end{pmatrix} = -6 \det \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$
$$= -6 \cdot -1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 8 = 48.$$

(18 pt) **3.** (a) Het orthogonaal complement van V bestaat uit de vectoren $\mathbf{v}$ met $P\mathbf{v} = \mathbf{0}$, oftewel de kern van P. We berekenen deze kern door te vegen:

$$P \sim \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

We zien dat v_3 een vrije variabele is; door $v_3 = 1$ te nemen, vinden we door terugsubstitueren achtereenvolgens $v_2 = -2$ en $v_1 = 1$. De kern (dus $V^\perp$) wordt dus opgespannen door de vector $(1, -2, 1)$.

(b) Als S de standaardmatrixrepresentatie van de spiegeling in V is, dan geldt voor alle $\mathbf{v}$ de vergelijking

$$\mathbf{v} + S\mathbf{v} = 2P\mathbf{v}$$

(maak een schets, of ga na dat dit zowel voor vectoren in V als voor vectoren in $V^\perp$ geldt). Dit kunnen we herschrijven als

$$S\mathbf{v} = 2P\mathbf{v} - I\mathbf{v},$$

dus

$$S = 2P - I = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(18 pt) **4.** (a) Het karakteristiek polynoom van A is

$$p(t) = \det(A - It) = \det \begin{pmatrix} 5-t & -3 \\ 8 & -5-t \end{pmatrix} = (5-t)(-5-t) - (-3) \cdot 8 = t^2 - 1.$$

De eigenwaarden zijn $\lambda_1 = -1$ en $\lambda_2 = 1$. Er geldt

$$E_{-1}(A) = \ker(A + I) = \ker \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 8 & -4 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\},$$

dus $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ is een eigenvector bij $\lambda_1 = -1$. Verder geldt

$$E_1(A) = \ker(A - I) = \ker \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 8 & -6 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\},$$

dus $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ is een eigenvector bij $\lambda_2 = 1$. We concluderen dat $A = CDC^{-1}$ geldt voor

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

(b) Het gegeven stelsel lineaire differentiaalvergelijkingen is te schrijven als

$$\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

waarbij $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$. De oplossing is

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) &= C \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} C^{-1}\mathbf{x}(0) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3/2 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 2e^{-t} \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

oftewel

$$x(t) = e^{-t}, \quad y(t) = 2e^{-t}.$$

(20 pt) **5.** (a) We vinden een orthogonale basis door middel van het Gram–Schmidt-procédé. Zo'n orthogonale basis is

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{v}_1, \quad \mathbf{b}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1.$$

We berekenen

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 &= 2^2 + 0^2 + (-1)^2 + 2^2 = 9, \\
\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 &= 2 \cdot -2 + 0 \cdot 1 + -1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = -3.
\end{aligned}$$

Dit geeft de orthogonale basis

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-3}{9} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Tot slot normaliseren we om een orthonormale basis te krijgen. Er geldt

$$\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_1 = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 = 9, \quad \mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{b}_2 = \frac{1}{9}((-4)^2 + 3^2 + 2^2 + 5^2) = 6.$$

Een orthonormale basis is dus $(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)$ met

$$\mathbf{q}_1 = \frac{1}{\|\mathbf{b}_1\|}\mathbf{b}_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}_2 = \frac{1}{\|\mathbf{b}_2\|}\mathbf{b}_2 = \frac{1}{3\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

(b) De matrix P van de orthogonale projectie op W voldoet aan $P = A(A^TA)^{-1}A^T$ waarbij $A = (\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2)$. We berekenen

$$A^TA = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 7 \end{pmatrix},$$

dus

$$(A^TA)^{-1} = \frac{1}{54} \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$$

en

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{54} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{54} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 3 & -4 & 17 \\ -12 & 9 & 6 & 15 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{54} \begin{pmatrix} 40 & -12 & -20 & 4 \\ -12 & 9 & 6 & 15 \\ -20 & 6 & 10 & -2 \\ 4 & 15 & -2 & 49 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(Een alternatieve methode is $P = \mathbf{q}_1\mathbf{q}_1^T + \mathbf{q}_2\mathbf{q}_2^T$, waarbij we $\mathbf{q}_1$ en $\mathbf{q}_2$ als 4×1-matrices beschouwen.)

(c) De orthogonale projectie van de vector $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ op W kunnen we met behulp van de bij (b) gevonden matrix berekenen als

$$P\mathbf{a} = \frac{1}{54} \begin{pmatrix} 40 & -12 & -20 & 4 \\ -12 & 9 & 6 & 15 \\ -20 & 6 & 10 & -2 \\ 4 & 15 & -2 & 49 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 28 \\ -3 \\ -14 \\ 19 \end{pmatrix}.$$

(Een alternatieve methode is $P\mathbf{a} = (\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{a})\mathbf{q}_1 + (\mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{a})\mathbf{q}_2$.)