Voorbeelduitwerkingen toets Lineaire algebra 1 NA

Maandag 30 oktober 2023, 13.00–15.00

(10 pt) **1.** (a) Bekijk de vectoren

$$\mathbf{v} = (1, -3, 3, -1), \quad \mathbf{w} = (-1, 3, -1, 2).$$

We berekenen

$$\|\mathbf{v}\|^2 = 1^2 + (-3)^2 + 3^2 + (-1)^2 = 20, \quad \|\mathbf{w}\|^2 = (-1)^2 + 3^2 + (-1)^2 + 2^2 = 15,$$
$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 1(-1) + (-3)(3) + 3(-1) + (-1)(2) = -15.$$

Dit geeft

$$\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\|} = \frac{-15}{\sqrt{20 \cdot 15}} = -\frac{15}{10\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

De hoek is dus

$$\angle(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5}{6}\pi.$$

(b) Stel $\mathbf{w} = c\mathbf{v}$ met $c \in \mathbf{R}$. Dan geldt $c\mathbf{v} + (-1)\mathbf{w} = \mathbf{0}$. Dit is een niet-triviale lineaire relatie tussen $\mathbf{v}$ en $\mathbf{w}$, dus $\mathbf{v}$ en $\mathbf{w}$ zijn lineair afhankelijk.

(10 pt) **2.** (a) We schrijven A voor de aangevulde matrix behorend bij dit stelsel en brengen A in rijtrapvorm:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ a & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right) \qquad R_2 \leftarrow R_2 - aR_1$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1-2a & -1-a \\ 0 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right) \qquad R_3 \leftarrow R_3 + R_2$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1-2a & -1-a \\ 0 & 0 & 2-2a & 1-a \end{array}\right).$$

Deze matrix staat in rijtrapvorm. Voor $a \neq 1$ staan er spillen in alle kolommen van de coëfficiëntenmatrix en heeft het stelsel precies één oplossing. Voor $a = 1$ is de onderste rij een nulrij en is z een vrije variabele; in dat geval zijn er oneindig veel oplossingen.

(b) Voor $a = 1$ wordt bovenstaande matrix $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$; deze correspondeert met het stelsel lineaire vergelijkingen

$$\begin{cases} x \qquad + 2z = 1 \\ \quad -2y - 3z = -2. \end{cases}$$

In termen van een parameter t worden de oplossingen

$$x = 1 - 2t, \quad y = 1 - \frac{3}{2}t, \quad z = t.$$

(10 pt) **3.** (a) We vegen de aangevulde matrix $(A \mid I)$:

$$
\begin{aligned}
(A \mid I) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) && R_1 \leftrightarrow R_3 \\
&\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) && R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1 \\
&\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) && R_2 \leftrightarrow R_3 \\
&\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) && R_3 \leftarrow R_3 - 3R_2 \\
&\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 1 & -2 \end{array}\right) && \begin{array}{l} R_1 \leftarrow -R_1 \\ R_3 \leftarrow \frac{1}{2} R_3 \end{array} \\
&\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 & 1/2 & -1 \end{array}\right) && R_1 \leftarrow R_1 - R_2 \\
&\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 & 1/2 & -1 \end{array}\right).
\end{aligned}
$$

Links van de streep staat nu de eenheidsmatrix, dus A is inverteerbaar met inverse

$$
A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -3/2 & 1/2 & -1 \end{pmatrix}.
$$

(b) We vegen de aangevulde matrix $(B \mid I)$:

$$
\begin{aligned}
(B \mid I) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) && R_1 \leftrightarrow R_2 \\
&\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) && \begin{array}{l} R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1 \\ R_3 \leftarrow R_3 - 2R_1 \end{array} \\
&\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) && R_3 \leftarrow R_3 - 3R_2 \\
&\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 4 & 1 \end{array}\right).
\end{aligned}
$$

De matrix staat nu in rijtrapvorm, maar links van de streep staat geen spil in kolom 3. Dit laat zien dat B niet inverteerbaar is.

(5 pt) **4.** We schrijven $\mathbf{a} = (-1, 2, 1)$. We gaan alle eisen voor een lineaire deelruimte na:

- De nulvector ligt in V, want $\mathbf{0} \cdot \mathbf{a} = 0$.
- Als $\mathbf{v}$ en $\mathbf{w}$ in V liggen, dan geldt $\mathbf{v} \cdot \mathbf{a} = 0$ en $\mathbf{w} \cdot \mathbf{a} = 0$, dus ook $(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \cdot \mathbf{a} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{a} = 0$. Dit impliceert $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in V$.
- Voor $\mathbf{v} \in V$ en $c \in \mathbf{R}$ geldt $\mathbf{v} \cdot \mathbf{a} = 0$, dus ook $(c\mathbf{v}) \cdot \mathbf{a} = c(\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}) = 0$. Dit impliceert $c\mathbf{v} \in V$.

Dit laat zien dat V inderdaad een lineaire deelruimte van $\mathbf{R}^3$ is.

(Alternatieve oplossing: V is op te vatten als de kern van de matrix $(-1\ \ 2\ \ 1)$, en we weten dat de kern van een matrix een lineaire deelruimte is.)

(10 pt) **5.** (a) We zetten $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ en $\mathbf{v}_3$ in een matrix A en vegen deze naar rijtrapvorm:

$$\begin{aligned}
A = &\begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 3 & 3 & -3 \\ 3 & 7 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} && R_1 \leftrightarrow R_2 \\
\sim &\begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 3 & 7 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} && R_1 \leftarrow \tfrac{1}{3} R_1 \\
\sim &\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -4 \\ 3 & 7 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} && \begin{matrix} R_2 \leftarrow R_2 - 3R_1 \\ R_3 \leftarrow R_3 - 3R_1 \\ R_4 \leftarrow R_4 + 2R_1 \end{matrix} \\
\sim &\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} && R_3 \leftarrow R_3 + 4R_2 \\
\sim &\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Deze matrix staat in rijtrapvorm, met spillen in de eerste twee kolommen. Het bijbehorende stelsel is $x_1 + x_2 - x_3 = 0$ en $-x_2 - x_3 = 0$. De variabele x_3 is vrij, en door bijvoorbeeld $x_3 = 1$ te kiezen, vinden we de oplossing $(x_1, x_2, x_3) = (2, -1, 1)$. Dit geeft de lineaire relatie $2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$. Dit laat zien dat $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ lineair afhankelijk is.

(b) Uit de bij (a) gevonden rijtrapvorm blijkt ook dat $\mathbf{v}_1$ en $\mathbf{v}_2$ (de kolommen van A die corresponderen met de spilkolommen in de rijtrapvorm) een basis vormen voor het opspansel van $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ en $\mathbf{v}_3$.