Voorbeelduitwerkingen tentamen Lineaire Algebra 1 NA

Vrijdag 5 januari 2024, 13.00–16.00

(*Opmerking:* bij het matrixvegen is de notatie voor de veegstappen weggelaten; geef deze bij een tentamen wel aan in je uitwerkingen!)

(16 pt) **1.** (a) Twee van de zijden van de driehoek corresponderen met de vectoren

$$\mathbf{v} = (4,2,1) - (2,-1,-1) = (2,3,2), \quad \mathbf{w} = (5,1,0) - (2,-1,-1) = (3,2,1).$$

Het kruisproduct is

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (-1, 4, -5).$$

De oppervlakte van de driehoek is

$$\frac{1}{2}\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\| = \frac{1}{2}\sqrt{(-1)^2 + 4^2 + (-5)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{42}.$$

(b) We schrijven A voor de matrix met kolommen $(1,0,2)^T$, $(0,2,2)^T$ en $(1,1,1)^T$. We berekenen

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ontwikkelen naar de laatste rij geeft

$$\det A = 2 \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 2(0-2) = -4.$$

De inhoud van het parallellepipedum is

$$|\det A| = 4.$$

(16 pt) **2.** We schrijven A voor de matrix met kolommen $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_4$ en brengen A in rijtrapvorm:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & a \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & a \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

In het geval $a = 1$ heeft deze matrix spillen in de kolommen 1 en 2, en vormen $\mathbf{v}_1$ en $\mathbf{v}_2$ dus een basis. In het geval $a \neq 1$ heeft de matrix spillen in de kolommen 1, 2 en 4, en vormen $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ en $\mathbf{v}_4$ dus een basis.

(18 pt) **3.** (a) We schrijven A voor de matrix met kolommen $\mathbf{v}_1$ en $\mathbf{v}_2$. De matrix voor de orthogonale projectie op V is $P_V = A(A^TA)^{-1}A^T$. We berekenen

$$A^TA = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 10 \end{pmatrix},$$

dus

$$(A^TA)^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 10 & -5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Hiermee krijgen we

$$\begin{aligned} P_V &= \frac{1}{5}A\begin{pmatrix} 10 & -5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 & -5 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(b) Elke vector $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^4$ is te ontbinden als

$$\mathbf{x} = x_V + x_{V^\perp} = P_V\mathbf{x} + P_{V^\perp}\mathbf{x},$$

waarbij $P_{V^\perp}$ de gezochte matrix is. We herschrijven dit als

$$P_{V^\perp}\mathbf{x} = I\mathbf{x} - P_V\mathbf{x}.$$

We concluderen dat

$$P_{V^\perp} = I - P_V = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(20 pt) **4.** (a) Het karakteristiek polynoom van A is

$$\begin{aligned} p(t) = \det(A - tI) &= \det\begin{pmatrix} 1-t & 2 \\ 1 & -t \end{pmatrix} \\ &= (1-t)(-t) - 2\cdot 1 = t^2 - t - 2 \\ &= (t+1)(t-2). \end{aligned}$$

De nulpunten van p, oftewel de eigenwaarden van A, zijn $\lambda_1 = -1$ en $\lambda_2 = 2$. De eigenruimten zijn

$$E_{-1} = \ker(A+I) = \ker\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$$

en

$$E_2 = \ker(A-2I) = \ker\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Hieruit volgt dat $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ en $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ eigenvectoren zijn bij λ_1 respectievelijk λ_2. We concluderen dat $A = CDC^{-1}$ geldt voor

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Voor $n \geq 0$ schrijven we

$$\mathbf{x}_n = \begin{pmatrix} G_{n+1} \\ G_n \end{pmatrix}.$$

Er geldt dan $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} G_1 \\ G_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ en

$$\mathbf{x}_{n+1} = \begin{pmatrix} G_{n+2} \\ G_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{n+1} + 2G_n \\ G_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_{n+1} \\ G_n \end{pmatrix} = A\mathbf{x}_n.$$

Met de matrices D en C uit (a) berekenen we

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_n &= A^n \mathbf{x}_0 \\
&= CD^n C^{-1} \mathbf{x}_0 \\
&= CD^n \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3} C \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -(-1)^n \\ 5 \cdot 2^n \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} (-1)^{n+1} + 5 \cdot 2^{n+1} \\ (-1)^n + 5 \cdot 2^n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

We concluderen dat $\mathbf{x}_n$ uitgedrukt kan worden als

$$\mathbf{x}_n = \frac{(-1)^n + 5 \cdot 2^n}{3}.$$

(20 pt) **5.** (a) We bepalen eerst een orthogonale basis voor V door middel van het Gram–Schmidt-procédé. Dit geeft

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}_1 &= \mathbf{v}_1, \\
\mathbf{b}_2 &= \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_1} \mathbf{b}_1, \\
\mathbf{b}_3 &= \mathbf{v}_3 - \frac{\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{v}_3}{\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_1} \mathbf{b}_1 - \frac{\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{v}_3}{\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{b}_2} \mathbf{b}_2.
\end{aligned}$$

We berekenen achtereenvolgens

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}_1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_1 &= 0^2 + 0^2 + 1^2 + 1^2 = 2, \\
\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{v}_2 &= 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot -2 = -2, \\
\mathbf{b}_2 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{-2}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \\
\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{b}_2 &= 1^2 + 1^2 + 1^2 + (-1)^2 = 4, \\
\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{v}_3 &= 0 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot -1 + 1 \cdot -1 = -2, \\
\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{v}_3 &= 1 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot -1 + -1 \cdot -1 = 2
\end{aligned}$$

en

$$\mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{-2}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Verder geldt

$$\mathbf{b}_3 \cdot \mathbf{b}_3 = \frac{1}{4}(3^2 + (-1)^2 + (-1)^2 + 1^2) = 3.$$

Hiermee vinden we de volgende orthonormale basis voor V:

$$\mathbf{q}_1 = \frac{1}{\|\mathbf{b}_1\|}\mathbf{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{q}_2 = \frac{1}{\|\mathbf{b}_2\|}\mathbf{b}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{q}_3 = \frac{1}{\|\mathbf{b}_3\|}\mathbf{b}_3 = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Omdat $(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)$ een orthonormale basis voor V is, geldt de formule

$$p_V(\mathbf{b}) = (\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{b})\mathbf{q}_1 + (\mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{b})\mathbf{q}_2 + (\mathbf{q}_3 \cdot \mathbf{b})\mathbf{q}_3.$$

We berekenen

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{b} &= \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{b} &= -1, \\ \mathbf{q}_3 \cdot \mathbf{b} &= -\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Dit geeft

$$\begin{aligned} p_V(\mathbf{b}) &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$