Hertentamen Lineaire algebra 1 NA

Dinsdag 23 januari 2024, 13.00–16.00

Laat zien hoe je aan je antwoorden komt. Het gebruik van rekenmachine, telefoon, boek of aantekeningen is niet toegestaan. Het cijfer is 1 + (aantal punten)/10.

(14 pt) **1.** (a) Bereken de hoek tussen de vectoren $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ in $\mathbf{R}^3$.

(b) Bepaal een vector in $\mathbf{R}^3$, ongelijk aan $\mathbf{0}$, die loodrecht op beide vectoren $\mathbf{v}$ en $\mathbf{w}$ uit (a) staat.

(c) Bereken de oppervlakte van het parallellogram in $\mathbf{R}^2$ met hoekpunten

$$(1, 2), \quad (3, 6), \quad (7, 1), \quad (5, -3).$$

(12 pt) **2.** Bepaal voor elke $a \in \mathbf{R}$ de oplossingsverzameling van het stelsel lineaire vergelijkingen

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ y + z = 1 \\ ax + 2z = -1. \end{cases}$$

(16 pt) **3.** (a) Bepaal een basis voor de lineaire deelruimte van $\mathbf{R}^4$ opgespannen door de vectoren

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

(b) We schrijven V voor de verzameling van alle vectoren $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ waarvoor geldt $x + 2y + 3z = 6$. Is V een lineaire deelruimte van $\mathbf{R}^3$? Waarom wel/niet?

(14 pt) **4.** De matrix

$$S = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

is de standaardmatrixrepresentatie van de spiegeling in een vlak V door de oorsprong in $\mathbf{R}^3$ (dit hoef je niet te bewijzen).

(a) Bepaal de standaardmatrixrepresentatie van de orthogonale projectie op V.

(b) Bepaal het orthogonaal complement van V.

Opgaven 5 en 6 staan op de achterkant.

(*18 pt*) **5.** Gegeven is de matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bepaal de eigenwaarden van A en de bijbehorende eigenruimten.

(b) Bepaal functies $x = x(t)$, $y = y(t)$ die voldoen aan

$$\begin{cases} x'(t) = -2x(t) - 3y(t), \\ y'(t) = x(t) + 2y(t), \end{cases} \qquad \begin{cases} x(0) = 2, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

(*16 pt*) **6.** Bekijk de lineaire deelruimte W van $\mathbf{R}^4$ opgespannen door de vectoren

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bepaal een orthonormale basis voor W.

(b) Bereken de orthogonale projectie van de vector $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ op W.

Succes!

Bij dit tentamen mag de volgende tabel gebruikt worden.

t	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π
$\sin t$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos t$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1