

Groupes de Chow supérieurs, applications classe de cycle et régulateurs étales

Peter Bruin
Groupe de travail sur les zéro-cycles
9 février 2011

1. Introduction

Le but de ces notes est d'expliquer la première partie du §2 de l'article d'Asakura et Saito [1]. Le plan est comme suit :

- (1) Soit X un schéma lisse et quasi-projectif sur un corps K . Nous définirons les groupes de Chow supérieurs $\mathrm{CH}^b(X, m)$ et $\mathrm{CH}^b(X, m, \Lambda)$ inventés par Bloch, où b et m sont des entiers et Λ est un groupe abélien.
- (2) Soit n un entier positif inversible sur X . On note $\Lambda = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$; pour tout entier i , on note $\Lambda(i)$ le faisceau en Λ -modules $\mu_n^{\otimes i}$ sur $X_{\text{ét}}$. Nous définirons les applications classe de cycle

$$\mathrm{cyc}_X^{b,m} : \mathrm{CH}^b(X, m, \Lambda) \longrightarrow \mathrm{H}^{2b-m}(X_{\text{ét}}, \Lambda(b)).$$

En utilisant la cohomologie étale continue, on peut également construire des applications classe de cycle l -adiques

$$\mathrm{cyc}_X^{b,m} : \mathrm{CH}^b(X, m, \Lambda) \longrightarrow \mathrm{H}_{\text{cont}}^{2b-m}(X_{\text{ét}}, \mathbf{Z}_l(b)).$$

- (3) Pour tout nombre premier l inversible dans K , nous définirons le régulateur supérieur l -adique de Bloch et Kato

$$\mathrm{reg}_{X/K}^{b,m} : \mathrm{CH}^b(X, m)_{K\text{-loc.}\sim 0} \longrightarrow \mathrm{H}_{\text{cont}}^1(\mathrm{Gal}(K_{\text{sep}}/K), \mathrm{H}^{2b-m-1}(X_{K_{\text{sep,ét}}}, \mathbf{Q}_l(b))).$$

Ici, K_{sep} est une clôture séparable de K et $\mathrm{CH}^b(X, m)_{K\text{-loc.}\sim 0}$ est le sous-groupe de $\mathrm{CH}^b(X, m)$ des éléments dont la classe dans $\mathrm{H}^{2b-m}(X_{K_{\text{sep,ét}}}, \mathbf{Q}_l(b))$ s'annule. Ce sous-groupe est égal à $\mathrm{CH}^b(X, m)$ dans les cas auxquels on s'intéresse, à savoir $b = 2$, $m = 1$ et K soit un corps p -adique soit une extension de type fini de \mathbf{Q} .

1.1. Le théorème d'Asakura et Saito

Asakura et Saito [1] étudient le groupe de zéro-cycles $\mathrm{CH}_0(X) = \mathrm{CH}^2(X)$ d'une surface lisse X sur un corps p -adique. Leur résultat principal est l'énoncé suivant :

Théorème 1.1 (Asakura et Saito [1]). *Soit p un nombre premier, et soit K une extension finie de \mathbf{Q}_p . On note \mathbf{Z}_K l'anneau des entiers de K et k son corps résiduel. Soit \mathcal{X} une surface projective lisse de degré ≥ 5 dans $\mathbf{P}_{\mathbf{Z}_K}^3$ tel que $X = \mathcal{X}_K$ soit générique dans le sens de [1]. On note r le rang du groupe de Picard de \mathcal{X}_k . Pour tout nombre premier $l \neq p$, le sous-groupe de torsion l -primaire du groupe de Chow des zéro-cycles est de la forme*

$$\mathrm{CH}_0(X)\{l\} \cong (\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l)^{r-1} \oplus \text{groupe fini.}$$

On verra ci-dessous qu'il y a une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \mathrm{CH}^2(X, 1) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l \longrightarrow \mathrm{CH}^2(X, 1, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l) \longrightarrow \mathrm{CH}^2(X)\{l\} \longrightarrow 0,$$

La stratégie d'Asakura et Saito est de démontrer que

$$\mathrm{CH}^2(X, 1) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l \cong \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l \oplus \text{groupe fini,}$$

tandis que

$$\mathrm{CH}^2(X, 1, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l) \cong (\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l)^r \oplus \text{groupe fini.}$$

Ces assertions sont démontrées dans [1, Theorems 3.6(1) and 4.1], où les deux groupes à gauche sont étudiés en relation au groupe $\mathrm{CH}^1(\mathcal{X}_k) \cong \mathrm{Pic} \mathcal{X}_k$ via des morphismes de localisation

$$\mathrm{CH}^2(X, 1) \rightarrow \mathrm{CH}^1(\mathcal{X}_k)$$

et

$$\mathrm{CH}^2(X, 1, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l) \rightarrow \mathrm{CH}^1(\mathcal{X}_k) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l.$$

1.2. Liste des faits utilisées par Asakura et Saito

Voici les faits sur les groupes de Chow supérieurs et les applications classe de cycle qui sont utilisés dans [1].

- Théorème de localisation et compatibilité avec les applications classe de cycle, dans le cas particulier suivant : Soit B un trait de point générique η et de point fermé s , soit X un B -schéma lisse de type fini et soit $\Lambda = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ avec n un entier positif inversible sur B . Alors on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & \mathrm{CH}^2(X_\eta, 1, \Lambda) & \longrightarrow & \mathrm{CH}^1(X_s, \Lambda) & \longrightarrow & \mathrm{CH}^2(X, \Lambda) & \longrightarrow & \mathrm{CH}^2(X_\eta, \Lambda) \\ & & \mathrm{cyc}^{2,1} \downarrow & & \mathrm{cyc}^{1,0} \downarrow & & \mathrm{cyc}^{2,0} \downarrow & & \mathrm{cyc}^{2,0} \downarrow \\ \cdots & \longrightarrow & \mathrm{H}^3(X_{\eta,\acute{e}t}, \Lambda(2)) & \longrightarrow & \mathrm{H}^2(X_{s,\acute{e}t}, \Lambda(1)) & \longrightarrow & \mathrm{H}^4(X_{\acute{e}t}, \Lambda(2)) & \longrightarrow & \mathrm{H}^4(X_{\eta,\acute{e}t}, \Lambda(2)) \end{array}$$

dont les lignes sont les suites exactes de localisation et les flèches verticales sont les applications classe de cycle. (Voir aussi Saito et Sato [12, Proposition 1.13].)

- Injectivité de l'application classe de cycle

$$\mathrm{cyc}_X^{2,1} : \mathrm{CH}^2(X, 1, \Lambda) \longrightarrow \mathrm{H}^3(X_{\acute{e}t}, \Lambda(2)),$$

utilisée dans [1, Theorem 4.1].

- Applications classe de cycle

$$\mathrm{cyc}_{\acute{e}t}^{b,m} : \mathrm{CH}^b(X, m) \longrightarrow \mathrm{H}_{\mathrm{cont}}^{2b-m}(X_{\acute{e}t}, \mathbf{Z}(b))$$

et pour X lisse sur \mathbf{C}

$$\mathrm{cyc}_{\mathrm{an}}^{b,m} : \mathrm{CH}^b(X, m) \longrightarrow \mathrm{H}^{2b-m}(X_{\mathrm{an}}, \mathbf{Z}(b))$$

$$\mathrm{cyc}_{\mathrm{DB}}^{b,m} : \mathrm{CH}^b(X, m) \longrightarrow \mathrm{H}_{\mathrm{DB}}^{2b-m}(X, \mathbf{Z}(b))$$

où H_{DB} est la cohomologie de Deligne–Beilinson, définie au moyen d'un certain complexe de groupes abéliens $\mathbf{Z}(b)_{\mathrm{DB}}$ sur X_{an} par

$$\mathrm{H}_{\mathrm{DB}}^n(X, \mathbf{Z}(b)) = \mathrm{H}^n(X_{\mathrm{an}}, \mathbf{Z}(b)_{\mathrm{DB}}).$$

- Pour X lisse sur \mathbf{C} , compatibilité des applications

$$\mathrm{cyc}_{\acute{e}t}^{2,1} : \mathrm{CH}^2(X, 1) \longrightarrow \mathrm{H}^3(X_{\acute{e}t}, \mathbf{Z}(2)),$$

$$\mathrm{cyc}_{\mathrm{an}}^{2,1} : \mathrm{CH}^2(X, 1) \longrightarrow \mathrm{H}^3(X_{\mathrm{an}}, \mathbf{Z}(2)),$$

$$\mathrm{cyc}_{\mathrm{DB}}^{2,1} : \mathrm{CH}^2(X, 1) \longrightarrow \mathrm{H}_{\mathrm{DB}}^3(X, \mathbf{Z}(2))$$

avec le morphisme

$$\mathrm{H}_{\mathrm{DB}}^3(X, \mathbf{Z}(2)) \longrightarrow \mathrm{H}^3(X_{\mathrm{an}}, \mathbf{Z}(2))$$

et avec l'isomorphisme

$$\mathrm{H}^3(X_{\acute{e}t}, \mathbf{Q}_l(2)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^3(X_{\mathrm{an}}, \mathbf{Q}(2)) \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}_l$$

Ces compatibilités sont utilisées dans [1, proof of Theorem 3.1], la première via [1, Lemma 2.1].

- Régulateur l -adique dans un contexte assez générale, utilisé dans [1, proof of Theorem 3.1].
- Un ingrédient important du travail d'Asakura et Saito est de montrer que une variante de la conjecture de Bloch–Kato (conjecture 6.1 ci-dessus) sur le régulateur l -adique, avec “corps p -adique” au lieu de “corps de nombres” est fausse.

1.3. Rapport avec la K-cohomologie

Le lecteur qui connaît [1, § 2] notera l'absence de la K-théorie dans notre discussion. J'ai essayé de voir si l'usage de la K-théorie dans [1, § 2] pourrait être contourné par un usage plus étendu de la construction des applications classe de cycle de Bloch [2] ; ce semble effectivement être possible. De plus, j'ai supprimé les références aux résolutions de Gersten, bien que celles-ci rendent la théorie peut-être plus explicite. Pour clarifier, notons ici quelques différences entre ces notes et [1, § 2].

Pour X un schéma quasi-projective lisse sur un corps, nous utilisons la définition de Bloch [2] pour l'application classe de cycle

$$\mathrm{cyc}_{\acute{e}t}^{b,m} : \mathrm{CH}^b(X, m, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \longrightarrow \mathrm{H}^{2b-m}(X_{\acute{e}t}, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}(b)).$$

Cette construction est essentiellement identique à celle de Geisser et Levine [9, § 3.7] utilisée par Asakura et Saito. Cependant, Bloch isole les conditions qu'une théorie de cohomologie doit vérifier pour que la construction marche. Ces conditions (description de la cohomologie comme hypercohomologie d'un complexe de faisceaux sur un site convenable, existence de classes de cycles "ordinaires" et semi-pureté de la cohomologie à supports) sont aussi vérifiés pour la cohomologie de Deligne–Beilinson et pour la cohomologie singulière d'une variété lisse sur \mathbf{C} .

On note $\mathcal{H}_{\acute{e}t}^2$ et \mathcal{K}_2 les faisceautisés des préfaisceaux $U \mapsto \mathrm{H}^2(U_{\acute{e}t}, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}(2))$ et $U \mapsto \mathrm{K}_2(U)$ sur X_{Zar} , où $\mathrm{K}_2(U)$ est le groupe K_2 de Quillen du schéma U . La théorie de Bloch–Ogus implique que l'image de l'application classe de cycle

$$\mathrm{cyc}_{\acute{e}t}^{2,1} : \mathrm{CH}^2(X, 1, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \rightarrow \mathrm{H}^3(X_{\acute{e}t}, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}(2))$$

s'identifie à $\mathrm{H}^1(X_{\mathrm{Zar}}, \mathcal{H}_{\acute{e}t}^2(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}(2)))$. La deuxième construction de l'application classe de cycle donnée par Asakura et Saito utilise un certain isomorphisme

$$\Psi : \mathrm{CH}^2(X, 1, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1(X_{\mathrm{Zar}}, \mathcal{K}_2/n\mathcal{K}_2)$$

dû à Landsburg, ainsi qu'un isomorphisme

$$\mathrm{H}^1(X_{\mathrm{Zar}}, \mathcal{K}_2/n\mathcal{K}_2) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1(X_{\mathrm{Zar}}, \mathcal{H}_{\acute{e}t}^2(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}(2)))$$

induit par une application classe de Chern supérieure à valeurs dans la cohomologie étale. Pour montrer que les deux définitions sont compatibles, il faut vérifier que l'application composée

$$\mathrm{CH}^2(X, 1, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1(X_{\mathrm{Zar}}, \mathcal{K}_2/n\mathcal{K}_2) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^1(X_{\mathrm{Zar}}, \mathcal{H}_{\acute{e}t}^2(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}(2)))$$

coïncide avec $\mathrm{cyc}_{\acute{e}t}^{2,1}$. Je n'ai pas su faire cette vérification.

Pour définir $\mathrm{cyc}_{\mathrm{an}}^{2,1}$ pour X lisse sur \mathbf{C} , Asakura et Saito donnent seulement une construction analogue à la deuxième construction de $\mathrm{cyc}_{\acute{e}t}^{2,1}$ ci-dessus. La compatibilité avec la construction "à la Bloch" résulte de la compatibilité des classes de Chern supérieures de \mathcal{K}_2 vers respectivement $\mathcal{H}_{\acute{e}t}^2(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}(2))$ et $\mathcal{H}_{\mathrm{an}}^2(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}(2))$, compatibilité citée dans [1, proof of Lemma 2.2].

Dans l'approche adoptée ici, on peut démontrer [1, Lemma 2.1] en notant, compte tenu de la compatibilité entre $\mathrm{cyc}_{\mathrm{an}}^{2,1}$ et $\mathrm{cyc}_{\mathrm{DB}}^{2,1}$, que l'application $\mathrm{cyc}_{\mathrm{an}}^{2,1}$ se factorise comme

$$b \circ \mathrm{cyc}_{\mathrm{DB}}^{2,1} : \mathrm{CH}^2(X, 1) \longrightarrow \mathrm{H}_{\mathrm{DB}}^3(X, \mathbf{Z}(2)) \longrightarrow \mathrm{H}^3(X_{\mathrm{an}}, \mathbf{Z}(2))$$

et on utilise le fait que l'image de b est contenue dans $\mathrm{F}^2\mathrm{H}^3(X_{\mathrm{an}}, \mathbf{C})$. On note enfin que [1, Lemma 2.2] n'est autre que la compatibilité entre $\mathrm{cyc}_{\acute{e}t}^{2,1}$ et $\mathrm{cyc}_{\mathrm{an}}^{2,1}$ déjà notée ci-dessus.

2. Groupes de Chow supérieurs

2.1. Le schéma cosimplicial standard

Soit Δ la catégorie dont les objets sont les ensembles finis ordonnés

$$[n] = \{0, 1, \dots, n\} \quad \text{pour } n = 0, 1, 2, \dots$$

et dont les morphismes $[m] \rightarrow [n]$ sont les fonctions croissantes. Pour tout n et tout $i \in [n]$, on note $\delta_i : [n-1] \rightarrow [n]$ l'unique fonction injective croissante qui saute i .

Pour tout entier positif n , on considère le n -simplexe

$$\Delta^n = \text{Spec } \mathbf{Z}[t_0, \dots, t_n]/(t_0 + \dots + t_n - 1) \quad (\simeq \mathbf{A}^n).$$

Pour tout morphisme $f : [m] \rightarrow [n]$ dans Δ , on a une application

$$\Delta^f : \Delta^m \rightarrow \Delta^n$$

qui est le morphisme d'espaces affines induite par l'homomorphisme surjectif

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}[t_0, \dots, t_n]/(t_0 + \dots + t_n - 1) &\rightarrow \mathbf{Z}[t_0, \dots, t_m]/(t_0 + \dots + t_m - 1) \\ t_i &\mapsto \sum_{j:f(j)=i} t_j. \end{aligned}$$

Ces données définissent un foncteur $\Delta^* : \Delta \rightarrow \mathbf{Sch}$.

Si f est injective, alors Δ^f est une immersion fermée. Les *faces* de Δ^n sont les sous-schémas fermés qui interviennent comme images d'une telle f .

2.2. Définition des groupes de Chow supérieurs

Soit X un schéma quasi-projectif sur un corps K . Pour éviter certaines difficultés, on suppose que les composantes connexes de X soient équidimensionnelles ; c'est vrai si X est lisse.

Soient b et m des entiers positifs. On note $\mathcal{Z}^b(X, m)$ le \mathbf{Z} -module libre engendré par les sous-variétés intègres

$$W \mapsto X \times \Delta^m$$

tels que

- (1) W est de codimension b dans $X \times \Delta^m$;
- (2) pour toute face F de Δ^m , $W \cap (X \times F)$ est de codimension $\geq b$ dans $X \times F$.

Soient m, m', b des entiers positifs. Pour tout morphisme $f : [m'] \rightarrow [m]$ dans Δ , on peut tirer en arrière un cycle quelconque dans $\mathcal{Z}^b(X, m)$ par le morphisme

$$\text{id}_X \times \Delta^f : X \times \Delta^{m'} \longrightarrow X \times \Delta^m.$$

Cela définit un homomorphisme

$$f^* = \mathcal{Z}^b(X, f) : \mathcal{Z}^b(X, m) \rightarrow \mathcal{Z}^b(X, m').$$

Pour tout b , cette construction nous donne un foncteur $\mathcal{Z}^b(X, \) : \Delta^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Ab}$.

On définit les *groupes de Chow supérieurs des cycles de codimension b* comme les groupes d'homologie

$$\text{CH}^b(X, m) = \text{H}_m[\dots \longrightarrow \mathcal{Z}^b(X, 2) \xrightarrow{d_2} \mathcal{Z}^b(X, 1) \xrightarrow{d_1} \mathcal{Z}^b(X, 0)]$$

où

$$d_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i \delta_i^*.$$

En effet, il est facile de vérifier que $d_n \circ d_{n+1} = 0$.

Comme pour les groupes de Chow usuels, on définit les groupes de Chow supérieurs de cycles de *dimension* d par

$$\mathrm{CH}_d(X, m) = \mathrm{CH}^{\dim X - d}(X, m).$$

Cette notation se généralise mieux aux variétés quasi-projectives qui ne sont pas équidimensionnelles.

Voici quelques propriétés importantes des groupes de Chow supérieurs ; pour plus de détails, voir Bloch [3].

- (1) Functorialité : covariante pour les morphismes propres, contravariante pour les morphismes plats (et pour tous morphismes vers un schéma lisse sur K).
- (2) Localisation : voir ci-dessous.
- (3) Homotopie : pour tout fibré vectoriel $E \rightarrow X$, les homomorphismes $\mathrm{CH}^b(X, m) \rightarrow \mathrm{CH}^b(E, m)$ donnés par la functorialité contravariante sont des isomorphismes.
- (4) Produits : si X et Y sont quasi-projectifs sur K , on peut définir des applications bilinéaires

$$\mathrm{CH}^b(X, m) \times \mathrm{CH}^c(Y, n) \rightarrow \mathrm{CH}^{b+c}(X \times_{\mathrm{Spec} K} Y, m + n).$$

Si X est lisse sur K , ces applications pour $X = Y$ et la functorialité contravariante pour le morphisme diagonal donnent des applications

$$\mathrm{CH}^b(X, m) \times \mathrm{CH}^c(X, n) \rightarrow \mathrm{CH}^{b+c}(X, m + n).$$

Cette construction munit $\bigoplus_{b,m} \mathrm{CH}^b(X, m)$ d'une structure d'anneau (non commutatif).

- (5) On peut identifier $\mathrm{CH}^b(X, 0)$ à $\mathrm{CH}^b(X)$ pour tout b ; voir ci-dessous.
- (6) Basses codimensions : on a

$$\mathrm{CH}^0(X, m) = \begin{cases} \mathbf{Z}^{\text{composantes irréductibles de } X} & \text{pour } m = 0, \\ 0 & \text{pour } m \geq 1. \end{cases}$$

De plus, si X est régulier, on a des isomorphismes

$$\mathrm{CH}^1(X, m) \cong \begin{cases} \mathrm{Pic} X & \text{pour } m = 0, \\ \mathbf{G}_m(X) & \text{pour } m = 1, \\ 0 & \text{pour } m \geq 2. \end{cases}$$

Signalons que $\mathrm{CH}^b(X, m)$ ne s'annule pas en général pour tout $m > b$ si $b \geq 2$.

2.3. Groupes de Chow supérieurs à coefficients

On répète la construction ci-dessus en remplaçant le groupe de coefficients \mathbf{Z} par un groupe abélien Λ quelconque. Cela donne un foncteur $\mathcal{Z}^b(X, \cdot, \Lambda) : \Delta^{\mathrm{op}} \rightarrow \mathbf{Ab}$ et des groupes de Chow supérieurs $\mathrm{CH}^b(X, m, \Lambda)$. La construction est fonctorielle en Λ .

Pour $\Lambda = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, avec n un entier positif quelconque, on obtient une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \mathrm{CH}^b(X, m) \otimes \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \longrightarrow \mathrm{CH}^b(X, m, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \longrightarrow \mathrm{CH}^b(X, m-1)[n] \longrightarrow 0 \quad (2.1)$$

qui montre la différence entre réduction modulo n et passage à l'homologie dans un complexe de \mathbf{Z} -modules libres. En prenant la limite inductive, pour $r \rightarrow \infty$, de cette suite exacte pour $n = l^r$ avec l un nombre premier, on obtient une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \mathrm{CH}^b(X, m) \otimes \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l \longrightarrow \mathrm{CH}^b(X, m, \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l) \longrightarrow \mathrm{CH}^b(X, m-1)\{l\} \longrightarrow 0,$$

où $\{l\}$ signifie la torsion l -primaire.

2.4. Le cas $m = 0$: groupes de Chow classiques

Dans le cas $m = 0$, on retrouve les groupes de Chow $\mathrm{CH}^b(X)$. Pour voir cela, il s'agit de déterminer le conoyau de l'application

$$d_1 = \delta_0^* - \delta_1^* : \mathcal{Z}^b(X, \) \rightarrow \mathcal{Z}^b(X, \).$$

Or le groupe $\mathcal{Z}^b(X, 0)$ n'est autre que le groupe des cycles de codimension b sur X , le groupe $\mathcal{Z}^b(X, 1)$ est isomorphe au groupe de cycles de codimension b dans $X \times \mathbf{A}^1$ dont aucune composante irréductible n'est contenue dans $X \times \{0, 1\}$, et d_1 envoie un tel cycle sur la différence entre ses intersections avec respectivement $X \times \{0\}$ et $X \times \{\infty\}$. En utilisant l'une des caractérisations de la notion d'équivalence rationnelle, on voit que l'image de d_1 est le groupe des cycles de codimension b dans X qui sont rationnellement équivalents à zéro ; cf. Fulton [8, Proposition 1.6]. Autrement dit, le conoyau de d_1 est $\mathrm{CH}^b(X)$.

En particulier, en prenant $m = 0$ dans la suite exacte courte (2.1), on obtient un isomorphisme canonique

$$\mathrm{CH}^b(X) \otimes \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \xrightarrow{\sim} \mathrm{CH}^b(X, 0, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}).$$

3. Localisation

Soit X un schéma quasi-projectif sur un corps. L'énoncé suivant peut se voir comme une sorte de "lemme de déplacement". La démonstration est très compliquée.

Théorème 3.1 (Bloch [4]). *Soit Y un sous-schéma fermé de X . Pour tout entier b , dans la suite exacte*

$$0 \longrightarrow \mathcal{Z}_b(Y, \) \longrightarrow \mathcal{Z}_b(X, \) \longrightarrow \mathcal{Z}_b(X \setminus Y, \) \longrightarrow C \longrightarrow 0,$$

le complexe C (qui est défini par l'exactitude de cette suite) est exact.

On peut en déduire l'énoncé suivant pour les groupes de Chow supérieurs, dont la preuve est laissé au lecteur.

Corollaire 3.2 (Suite exacte longue de localisation). *Soit X un schéma quasi-projectif sur un corps, et soit Y un sous-schéma fermé de X . Pour tout entier d , on a une suite exacte longue*

$$\begin{aligned} \dots &\longrightarrow \mathrm{CH}_d(Y, 2) \longrightarrow \mathrm{CH}_d(X, 2) \longrightarrow \mathrm{CH}_d(X \setminus Y, 2) \\ &\longrightarrow \mathrm{CH}_d(Y, 1) \longrightarrow \mathrm{CH}_d(X, 1) \longrightarrow \mathrm{CH}_d(X \setminus Y, 1) \\ &\longrightarrow \mathrm{CH}_d(Y, 0) \longrightarrow \mathrm{CH}_d(X, 0) \longrightarrow \mathrm{CH}_d(X \setminus Y, 0) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

3.1. Suite spectrale de coniveau

Soit X un schéma quasi-projectif sur un corps. La *filtration par le coniveau* sur le complexe de cycles $\mathcal{Z}^b(X, \)$ est la filtration décroissante

$$\mathcal{Z}^b(X, \) = \mathrm{N}^0 \mathcal{Z}^b(X, \) \supseteq \mathrm{N}^1 \mathcal{Z}^b(X, \) \supseteq \dots,$$

où $\mathrm{N}^p \mathcal{Z}^b(X, m)$ est le sous-groupe engendré par les cycles dont la projection sur X est à support de codimension $\geq p$. Cette filtration induit une filtration sur les groupes de Chow supérieurs qu'on note $\mathrm{N}^p \mathrm{CH}^b(X, m)$.

Dans [3, § 10], Bloch construit une suite spectrale

$$E_1^{p,q} = \bigoplus_{x \in X^{(p)}} \mathrm{CH}^{b-p}(\mathrm{Spec} k(x), -p-q) \implies \mathrm{N}^p \mathrm{CH}^b(X, -p-q) \quad (3.1)$$

qui s'appelle la *suite spectrale de coniveau* pour les groupes de Chow supérieurs. Elle converge vers la filtration de coniveau. La construction de cette suite spectrale utilise le théorème 3.1. On note que $E_1^{p,q} = 0$ sauf si $0 \leq p \leq b$ et $q \leq -b$.

3.2. Les groupes $\mathrm{CH}^2(X, m)$

Proposition 3.3. *Soit X un schéma quasi-projectif sur un corps. Alors la filtration de coniveau sur les groupes $\mathrm{CH}^2(X, m)$ est*

$$\begin{aligned} N^p \mathrm{CH}^2(X, 0) &= \begin{cases} \mathrm{CH}^2(X, 0) & \text{si } p \leq 2, \\ 0 & \text{si } p > 2; \end{cases} \\ N^p \mathrm{CH}^2(X, 1) &= \begin{cases} \mathrm{CH}^2(X, 1) & \text{si } p \leq 1, \\ 0 & \text{si } p > 1; \end{cases} \\ N^p \mathrm{CH}^2(X, m) &= \begin{cases} \mathrm{CH}^2(X, m) & \text{si } p = 0, \\ 0 & \text{si } p > 0 \end{cases} \quad (m \geq 2). \end{aligned}$$

Preuve. On regarde la suite spectrale de coniveau (3.1), et on note que $E_1^{p,q} = 0$ sauf si $0 \leq p \leq 2$ et $q \leq -2$. La partie intéressante de la page 1 est donc (lignes -2 , -3 et -4)

$$\begin{array}{ccccc} \bigoplus_{x \in X^{(0)}} \mathrm{CH}^2(\mathrm{Spec} k(x), 2) & \longrightarrow & \bigoplus_{x \in X^{(1)}} \mathrm{CH}^1(\mathrm{Spec} k(x), 1) & \longrightarrow & \bigoplus_{x \in X^{(2)}} \mathrm{CH}^0(\mathrm{Spec} k(x), 0) \\ \bigoplus_{x \in X^{(0)}} \mathrm{CH}^2(\mathrm{Spec} k(x), 3) & \longrightarrow & \bigoplus_{x \in X^{(1)}} \mathrm{CH}^1(\mathrm{Spec} k(x), 2) & \longrightarrow & \bigoplus_{x \in X^{(2)}} \mathrm{CH}^0(\mathrm{Spec} k(x), 1) \\ \bigoplus_{x \in X^{(0)}} \mathrm{CH}^2(\mathrm{Spec} k(x), 4) & \longrightarrow & \bigoplus_{x \in X^{(1)}} \mathrm{CH}^1(\mathrm{Spec} k(x), 3) & \longrightarrow & \bigoplus_{x \in X^{(2)}} \mathrm{CH}^0(\mathrm{Spec} k(x), 2) \end{array}$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{CH}^0(\mathrm{Spec} k(x), m) &= 0 \quad \text{pour } m \geq 1, \\ \mathrm{CH}^1(\mathrm{Spec} k(x), m) &= 0 \quad \text{pour } m \geq 2. \end{aligned}$$

La suite dégénère à la page 2, et le lemme s'en déduit. \square

3.3. Groupes de Chow supérieurs à coefficients

Tous les \mathbf{Z} -modules dans la suite exacte du théorème 3.1 sont libres. Cela implique les analogues du théorème 3.1 et du corollaire 3.2 pour les groupes de Chow à coefficients dans $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ pour n un entier quelconque. De même, on peut vérifier que toutes les constructions du § 3 marchent pour les groupes $\mathrm{CH}^b(X, m, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$.

4. Application classe de cycle

Soit K un corps, et soit n un entier positif inversible dans K . On note $\Lambda = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, et pour tout entier i , on note $\Lambda(i)$ le faisceau en Λ -modules $\mu_n^{\otimes i}$ sur $(\mathrm{Spec} K)_{\acute{e}t}$. Soit X un schéma quasi-projectif lisse sur K . Soient b et m des entiers ; b sera fixé dans la discussion qui suit. Dans [2], Bloch définit des applications classe de cycle

$$\mathrm{cyc}_X^{b,m} : \mathrm{CH}^b(X, m, \Lambda) \longrightarrow \mathrm{H}^{2b-m}(X_{\acute{e}t}, \Lambda(b)). \quad (4.1)$$

4.1. Construction de l'application classe de cycle

On commence par choisir une résolution acyclique

$$\tilde{\Lambda}^0 \rightarrow \tilde{\Lambda}^1 \rightarrow \tilde{\Lambda}^2 \rightarrow \dots$$

du faisceau Λ sur $X_{\acute{e}t}$. On regarde le complexe double

$$\begin{array}{ccccc} \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \dots \longrightarrow & \Gamma(X \times \Delta^2, \tilde{\Lambda}^2(b)) & \longrightarrow & \Gamma(X \times \Delta^1, \tilde{\Lambda}^2(b)) & \longrightarrow & \Gamma(X \times \Delta^0, \tilde{\Lambda}^2(b)) \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \dots \longrightarrow & \Gamma(X \times \Delta^2, \tilde{\Lambda}^1(b)) & \longrightarrow & \Gamma(X \times \Delta^1, \tilde{\Lambda}^1(b)) & \longrightarrow & \Gamma(X \times \Delta^0, \tilde{\Lambda}^1(b)) \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \dots \longrightarrow & \Gamma(X \times \Delta^2, \tilde{\Lambda}^0(b)) & \longrightarrow & \Gamma(X \times \Delta^1, \tilde{\Lambda}^0(b)) & \longrightarrow & \Gamma(X \times \Delta^0, \tilde{\Lambda}^0(b)) \end{array}$$

où les flèches horizontales sont les $\sum(-1)^i \delta_i^*$. La suite spectrale associée à la filtration “horizontale” est

$$F_1^{p,q} = H^q((X \times \Delta^{-p})_{\text{ét}}, \Lambda(b)) \implies H^{p+q}(X_{\text{ét}}, \Lambda(b)).$$

En effet, par l’invariance par homotopie de la cohomologie étale, cette suite spectrale est dégénérée à la page 2, et

$$F_2^{p,q} = \begin{cases} H^q(X_{\text{ét}}, \Lambda(b)) & \text{si } p = 0, \\ 0 & \text{si } p \neq 0. \end{cases}$$

Regardons maintenant la cohomologie étale à supports dans les cycles de codimension b . Pour tout m , on note

$$\Gamma_{\bullet}(X \times \Delta^m, \tilde{\Lambda}^q(b)) = \varinjlim_{Z \in \mathcal{Z}^b(X,m)} \Gamma_{\text{supp } Z}(X \times \Delta^m, \tilde{\Lambda}^q(b))$$

et

$$H_{\bullet}^q((X \times \Delta^m)_{\text{ét}}, \Lambda(b)) = \varinjlim_{Z \in \mathcal{Z}^b(X,m)} H_{\text{supp } Z}^q((X \times \Delta^m)_{\text{ét}}, \Lambda(b)).$$

Parce que la cohomologie commute aux limites directes, les $H_{\bullet}^q(X \times \Delta_{\text{ét}}^m, \Lambda(b))$ sont les groupes de cohomologie du complexe

$$\Gamma_{\bullet}(X \times \Delta^m, \tilde{\Lambda}^0(b)) \longrightarrow \Gamma_{\bullet}(X \times \Delta^m, \tilde{\Lambda}^1(b)) \longrightarrow \Gamma_{\bullet}(X \times \Delta^m, \tilde{\Lambda}^2(b)) \longrightarrow \dots$$

En répétant la construction ci-dessus, on obtient donc une suite spectrale

$$\bullet F_1^{p,q} = H_{\bullet}^q((X \times \Delta^{-p})_{\text{ét}}, \Lambda(b)) \implies H^{p+q} \left(\text{Tot} \left(\bigoplus_{i,j \in \mathbf{Z}} \Gamma_{\bullet}(X \times \Delta^{-i}, \tilde{\Lambda}^j(b)) \right) \right),$$

Les applications classe de cycle “ordinaires” donnent un morphisme

$$\gamma : \mathcal{Z}^b(X, m) \otimes \Lambda \longrightarrow H_{\bullet}^{2b}((X \times \Delta^m)_{\text{ét}}, \Lambda(b)) = \bullet F_1^{-m, 2b},$$

et on a

$$\bullet F_1^{-m, q} = H_{\bullet}^q((X \times \Delta^m)_{\text{ét}}, \Lambda(b)) = 0 \quad \text{pour tout } q < 2b.$$

(C’est ici qu’on utilise l’hypothèse que X soit lisse.) On en déduit des morphismes

$$\begin{aligned} \text{CH}^b(X, m, \Lambda) &\rightarrow \bullet F_2^{-m, 2b} \\ &\dashrightarrow \bullet F_{\infty}^{-m, 2b}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Encore par pureté, on a une injection

$$\bullet F_{\infty}^{-m, 2b} \hookrightarrow H^{2b-m} \left(\text{Tot} \left(\bigoplus_{i,j \in \mathbf{Z}} \Gamma_{\bullet}(X \times \Delta^{-i}, \tilde{\Lambda}^j(b)) \right) \right). \tag{4.3}$$

Les inclusions

$$\Gamma_{\bullet}(X \times \Delta^{-i}, \tilde{\Lambda}^j(b)) \hookrightarrow \Gamma(X \times \Delta^{-i}, \tilde{\Lambda}^j(b))$$

induisent un morphisme

$$\begin{aligned} H^{2b-m} \left(\text{Tot} \left(\bigoplus_{i,j \in \mathbf{Z}} \Gamma_{\bullet}(X \times \Delta^{-i}, \tilde{\Lambda}^j(b)) \right) \right) &\longrightarrow H^{2b-m} \left(\text{Tot} \left(\bigoplus_{i,j \in \mathbf{Z}} \Gamma(X \times \Delta^{-i}, \tilde{\Lambda}^j(b)) \right) \right) \\ &\xrightarrow{\sim} H^{2b-m}(X_{\text{ét}}, \Lambda(b)). \end{aligned} \tag{4.4}$$

L’application classe de cycle est définie comme la composition de (4.2), (4.3) et (4.4).

4.2. Compatibilités

Fait 4.1. Soit X un schéma quasi-projectif et lisse sur un corps. L'application classe de cycle est fonctorielle dans le sens suivant : pour tout fermé Y de X de codimension d et lisse sur k , d'ouvert complémentaire $U = X \setminus Y$, et pour tout entier b , le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & \mathrm{CH}^b(U, 1) & \longrightarrow & \mathrm{CH}^{b-d}(Y, 0) & \longrightarrow & \mathrm{CH}^b(X, 0) & \longrightarrow & \mathrm{CH}^b(U, 0) \\ & & \mathrm{cyc}_Y^{b,1} \downarrow & & \mathrm{cyc}_Y^{b-d,0} \downarrow & & \mathrm{cyc}_X^{b,0} \downarrow & & \mathrm{cyc}_U^{b,0} \downarrow \\ \cdots & \longrightarrow & \mathrm{H}^{2b-1}(U_{\text{ét}}, \Lambda(b)) & \longrightarrow & \mathrm{H}^{2(b-d)}(Y_{\text{ét}}, \Lambda(b-d)) & \longrightarrow & \mathrm{H}^{2b}(X_{\text{ét}}, \Lambda(b)) & \longrightarrow & \mathrm{H}^{2b}(U_{\text{ét}}, \Lambda(b)) \end{array}$$

est commutatif.

Proposition 4.2. Soit X un schéma quasi-projectif et lisse sur un corps. Pour tout entier b , l'application classe de cycle induit un homomorphisme de la suite spectrale de coniveau (3.1) pour les groupes de Chow supérieurs $\mathrm{CH}^b(X, m)$ vers la suite spectrale de coniveau

$$E_1^{p,q} = \bigoplus_{x \in X^{(p)}} \mathrm{H}^{q-p}(k(x), \Lambda(m-p)) \implies \mathrm{N}^p \mathrm{H}^{p+q}(X_{\text{ét}}, \Lambda(m)),$$

pour les groupes de cohomologie $\mathrm{H}^i(X_{\text{ét}}, \Lambda(b))$ (voir Bloch et Ogus [6]) qui envoie le terme $E_r^{p,q}$ de la première suite spectrale vers le terme $E_r^{p,q+2b}$ de la seconde.

Preuve. Ceci résulte des compatibilités du fait 4.1 par la construction de la suite spectrale de coniveau. Les détails sont laissés au lecteur. \square

Corollaire 4.3. Soit X un schéma quasi-projectif et lisse sur un corps. Alors pour tous entiers b et m , le diagramme de groupes abéliens

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{x \in X^{(0)}} \mathrm{CH}^b(\mathrm{Spec} k(x), m, \Lambda) & \xrightarrow{\mathrm{cyc}^{b,m}} & \bigoplus_{x \in X^{(0)}} \mathrm{H}^{2b-m}(k(x), \Lambda(b)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bigoplus_{x \in X^{(1)}} \mathrm{CH}^{b-1}(\mathrm{Spec} k(x), m-1, \Lambda) & \xrightarrow{\mathrm{cyc}^{b-1,m-1}} & \bigoplus_{x \in X^{(1)}} \mathrm{H}^{2b-m-1}(k(x), \Lambda(b-1)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bigoplus_{x \in X^{(2)}} \mathrm{CH}^{b-2}(\mathrm{Spec} k(x), m-2, \Lambda) & \xrightarrow{\mathrm{cyc}^{b-2,m-2}} & \bigoplus_{x \in X^{(2)}} \mathrm{H}^{2b-m-2}(k(x), \Lambda(b-2)) \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

est commutatif, où les flèches horizontales sont les applications

$$\bigoplus_{x \in X^{(j)}} \mathrm{cyc}_{\mathrm{Spec} k(x)}^{b-j,m-j} : \mathrm{CH}^{b-j}(\mathrm{Spec} k(x), m-j, \Lambda) \longrightarrow \mathrm{H}^{2b-m-j}(k(x), \Lambda(b-j)).$$

Preuve. C'est la compatibilité donnée par la proposition 4.2 sur la première page de la suite spectrale de coniveau. \square

Le fait suivant est un cas spécial d'une compatibilité annoncé sans preuve par Bloch dans [2].

Fait 4.4. Soit X un schéma lisse sur un corps, et soit n un entier inversible sur X . Sous les applications classe de cycle $\mathrm{CH}^r(X, r, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \rightarrow \mathrm{H}^r(X, \mu_n^{\otimes r})$, la multiplication sur $\bigoplus_{r \geq 0} \mathrm{CH}^r(X, r, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$ est compatible au cup-produit sur $\bigoplus_{r \geq 0} \mathrm{H}^r(X, \mu_n^{\otimes r})$.

4.3. Les applications $\text{cyc}^{r,r}$ pour un corps

Soit F un corps. Nous avons dit ci-dessus sans preuve que $\text{CH}^1(\text{Spec } F, 1)$ est isomorphe à F^\times . On va décrire un isomorphisme explicite

$$\gamma : \text{CH}^1(\text{Spec } F, 1) \xrightarrow{\sim} F^\times.$$

Soit $\alpha \in \text{CH}^1(\text{Spec } F, 1)$. Par définition, α est représenté par un diviseur D sur la droite

$$\Delta^1 \times \text{Spec } F = \text{Spec } F[x, y]/(x + y - 1)$$

tel que le support de D est disjoint des points $(0, 1)$ et $(1, 0)$. On choisit une fonction rationnelle f sur $\Delta^1 \times \text{Spec } F$ tel que le diviseur de f soit égal à D . On pose

$$\gamma(\alpha) = f(0, 1)/f(1, 0).$$

Il n'est pas difficile de montrer que la définition ne dépend pas des choix de D et f .

En particulier, si (a, b) est un point rationnel sur $\Delta^1 \times \text{Spec } F$, on peut prendre $f = x - a$ et on obtient

$$\gamma(\alpha) = -\frac{a}{b} = \frac{a}{a-1}.$$

On peut utiliser cette formule pour définir une application inverse de γ ; en particulier, γ est un isomorphisme.

Soit maintenant n un entier positif inversible dans F . On note

$$d_F : F^\times \rightarrow \text{H}^1(F, \mu_n)$$

l'application de Kummer.

Lemme 4.5. *Le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \text{CH}^1(\text{Spec } F, 1) & \xrightarrow[\sim]{\gamma} & F^\times \\ \downarrow & & \downarrow d_F \\ \text{CH}^1(\text{Spec } F, 1, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) & \xrightarrow{\text{cyc}^{1,1}} & \text{H}^1(F, \mu_n) \end{array}$$

est commutatif (au signe près).

Preuve. C'est un calcul utilisant la définition de la classe de cohomologie d'un diviseur sur la droite affine ; voir Deligne [7, Cycle, n° 2.1]. Le signe dépend de la convention adoptée pour définir les différentielles dans le complexe total d'un complexe double. La preuve est laissée au lecteur assidu. \square

En utilisant la suite exacte courte (2.1) et le théorème 90 de Hilbert, on obtient du lemme 4.5 un diagramme commutatif (au signe près)

$$\begin{array}{ccc} \text{CH}^1(F, 1) \otimes \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} & \xrightarrow[\sim]{\gamma} & F^\times / F^{\times n} \\ \sim \downarrow & & \downarrow \sim \\ \text{CH}^1(F, 1, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) & \xrightarrow{\text{cyc}^{1,1}} & \text{H}^1(F, \mu_n) \end{array}$$

de sorte que l'application classe de cycle est un isomorphisme qui est donné par la formule

$$\begin{aligned} \text{cyc}_{\text{Spec } F}^{1,1} : \text{CH}^1(\text{Spec } F, 1, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) &\xrightarrow{\sim} \text{H}^1(F, \mu_n) \\ \alpha &\longmapsto d_F(f(0, 1)/f(1, 0)) \end{aligned}$$

pour toute fonction rationnelle f sur $\Delta^1 \times \text{Spec } F$ tel que le diviseur de f représente α .

Proposition 4.6. Soit F un corps, et soit n un entier positif inversible dans F . Alors l'application classe de cycle

$$\text{cyc}_{\text{Spec } F}^{r,r} : \text{CH}^r(\text{Spec } F, r, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \rightarrow \text{H}^r(F, \mu_n^{\otimes r})$$

est un isomorphisme pour $r = 0$ et $r = 1$, et elle est surjective pour tout $r \geq 2$.

Preuve. L'assertion est claire pour $r = 0$, et on a vu ci-dessus qu'elle est vraie pour $r = 1$. Pour démontrer la surjectivité de $\text{cyc}_{\text{Spec } F}^{r,r}$ pour $r \geq 2$, on va utiliser le $r^{\text{ième}}$ K-groupe de Milnor du corps F ,

$$\text{K}_r^{\text{M}}(F) = (F^\times)^{\otimes r} / \langle a_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_r \mid \exists i \neq j : a_i + a_j = 1 \rangle.$$

On sait que l'application

$$\begin{aligned} (F^\times)^{\otimes n} &\rightarrow \text{H}^r(F, \mu_n^{\otimes r}) \\ a_1 \otimes \cdots \otimes a_r &\mapsto d_F(a_1) \cup \cdots \cup d_F(a_r) \end{aligned}$$

induit un homomorphisme

$$h_{F,n}^r : \text{K}_r^{\text{M}}(F) / n\text{K}_r^{\text{M}}(F) \rightarrow \text{H}^r(F, \mu_n^{\otimes r})$$

qui s'appelle le symbole galoisien. Le théorème de Merkur'ev–Suslin dit que $h_{F,n}^2$ est un isomorphisme. Grâce aux travaux de plusieurs auteurs, notamment Voevodsky et Rost, on sait que $h_{F,n}^r$ est un isomorphisme pour tout r .

On considère le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \text{CH}^1(\text{Spec } F, 1, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^{\otimes r} & \xrightarrow{\text{prod.}} & \text{CH}^r(\text{Spec } F, r, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \\ \text{(cyc}_{\text{Spec } F}^{1,1})^{\otimes r} \downarrow & & \downarrow \text{cyc}_{\text{Spec } F}^{r,r} \\ \text{H}^1(F, \mu_n)^{\otimes r} & \xrightarrow{\cup} & \text{H}^r(F, \mu_n^{\otimes r}) \\ d_F^{\otimes r} \uparrow & & \sim \uparrow h_{F,n}^r \\ (F^\times)^{\otimes r} & \longrightarrow & \text{K}_r^{\text{M}}(F) \otimes \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \end{array}$$

Par définition de $h_{F,n}^r$, le carré en bas est commutatif, et les flèches $h_{F,n}^r$ et $(F^\times)^{\otimes r} \rightarrow \text{K}_r^{\text{M}}(F)$ sont surjectives, donc le cup-produit \cup est surjectif. Par le fait 4.4, le carré en haut est commutatif, et on a déjà vu que $\text{cyc}_{\text{Spec } F}^{1,1}$ est surjective. On en conclut que $\text{cyc}_{\text{Spec } F}^{r,r}$ est surjective. \square

4.4. Injectivité de $\text{cyc}_X^{2,1}$

Proposition 4.7. Soit X un schéma quasi-projectif et lisse sur un corps, soit n un entier inversible sur X . On note $\Lambda = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Alors l'application

$$\text{cyc}_X^{2,1} : \text{CH}^2(X, 1, \Lambda) \longrightarrow \text{H}^3(X_{\text{ét}}, \Lambda(2))$$

induit un isomorphisme

$$\text{CH}^2(X, 1, \Lambda) \xrightarrow{\sim} \text{N}^1\text{H}^3(X_{\text{ét}}, \Lambda(2)) \subseteq \text{H}^3(X_{\text{ét}}, \Lambda(2)).$$

Preuve. Par la proposition 3.3, $\text{CH}^2(X, 1, \Lambda)$ est égal à $\text{N}^1\text{CH}^2(X, 1, \Lambda)$. En regardant les suites spectrales de coniveau pour $\text{CH}^2(X, m, \Lambda)$ et pour $\text{H}^i(X_{\text{ét}}, \Lambda(2))$, on voit que $\text{N}^1\text{CH}^2(X, 1, \Lambda)$ s'identifie au terme $E_\infty^{1,-2} = E_2^{1,-2}$ de la première suite spectrale et que $\text{N}^1\text{H}^3(X_{\text{ét}}, \Lambda(2))$ s'identifie au terme $E_\infty^{1,2} = E_2^{1,2}$ de la seconde. Il résulte donc de la proposition 4.2 que $\text{cyc}_X^{2,1}$ est un morphisme

$$\text{CH}^2(X, 1, \Lambda) = \text{N}^1\text{CH}^2(X, 1, \Lambda) \longrightarrow \text{N}^1\text{H}^3(X_{\text{ét}}, \Lambda(2)) \subseteq \text{H}^3(X_{\text{ét}}, \Lambda(2)) \quad (4.5)$$

qui s'obtient en prenant la cohomologie dans les lignes du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \bigoplus_{x \in X^{(0)}} \text{CH}^2(\text{Spec } k(x), 2, \Lambda) & \longrightarrow & \bigoplus_{x \in X^{(1)}} \text{CH}^1(\text{Spec } k(x), 1, \Lambda) & \longrightarrow & \bigoplus_{x \in X^{(2)}} \text{CH}^0(\text{Spec } k(x), 0, \Lambda) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \bigoplus_{x \in X^{(0)}} \text{H}^2(k(x), \Lambda(2)) & \longrightarrow & \bigoplus_{x \in X^{(1)}} \text{H}^1(k(x), \Lambda(1)) & \longrightarrow & \bigoplus_{x \in X^{(2)}} \text{H}^0(k(x), \Lambda) \end{array}$$

du corollaire 4.3 pour $b = m = 2$. Par la proposition 4.6, la flèche verticale à gauche est surjective et les autres flèches verticales sont des isomorphismes. On en déduit que (4.5) est un isomorphisme. \square

5. Généralisation aux schémas sur un trait

Soit B un trait (le spectre d'un anneau de valuation discrète). On note η son point générique et s son point fermé. Pour tout B -schéma de type fini $p : Z \rightarrow B$, avec Z irréductible de point générique η_Z , on pose

$$\dim Z = \begin{cases} \dim_{\mathbf{K}_{\text{rull}}} Z_s = \text{tr deg}(k(\eta_Z)/k(s)) & \text{si } p(\eta_Z) = s, \\ \dim_{\mathbf{K}_{\text{rull}}} Z_\eta + 1 = \text{tr deg}(k(\eta_Z)/k(\eta)) + 1 & \text{si } p(\eta_Z) = \eta. \end{cases}$$

Soit maintenant X un B -schéma quasi-projectif. On suppose que les composantes connexes de X soient équidimensionnelles. Alors on peut définir les groupes de Chow supérieurs $\text{CH}^b(X, m)$ et $\text{CH}^b(X, m, \Lambda)$ de même façon comme ci-dessus ; voir Levine [11, Introduction]. Si X est lisse, on peut également définir des applications classe de cycle

$$\text{cyc}_X^{b,m} : \text{CH}^b(X, m, \Lambda) \rightarrow \text{H}^{2b-m}(X_{\text{ét}}, \Lambda(b)) ;$$

voir Geisser and Levine [9, § 3]. Il y a un résultat de localisation dû à Levine [11, Theorem 0.7] qui généralise le théorème 3.1. Les applications classe de cycle sont toujours compatibles à la localisation, donc on a une généralisation évidente du fait 4.1.

Remarque. Le théorème de localisation de Levine vaut pour tous les B -schémas de type fini, non seulement pour les B -schémas quasi-projectifs.

6. Application classe de cycle et régulateur l -adiques

6.1. Cohomologie étale continue

Dans [10], Jannsen définit des foncteurs de cohomologie étale continue \mathbf{H}_{cont} . Soit X un schéma, et soit $\mathcal{P}(\mathbf{Ab}_{X_{\text{ét}}})$ la catégorie des systèmes projectifs

$$\mathcal{F} = (\cdots \rightarrow \mathcal{F}_2 \rightarrow \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_0)$$

de faisceaux de groupes abéliens sur $X_{\text{ét}}$. Le foncteur

$$\begin{aligned} \underline{\Gamma} : \mathcal{P}(\mathbf{Ab}_{X_{\text{ét}}}) &\rightarrow \mathbf{Ab} \\ \mathcal{F} &\mapsto \varprojlim_n \Gamma(X_{\text{ét}}, \mathcal{F}_n) \end{aligned}$$

est exact à gauche. On définit

$$\underline{\mathbf{H}}^i(X_{\text{ét}}, \mathcal{F}) = \mathbf{R}^i \underline{\Gamma}(\mathcal{F}).$$

En particulier, pour un nombre premier l inversible sur X et un entier j , on considère le système projectif

$$\tilde{\mathbf{Z}}_l(j) = (\cdots \rightarrow \mu_{l^n}^{\otimes j} \rightarrow \cdots \rightarrow \mu_l^{\otimes j})$$

et on note

$$\mathbf{H}_{\text{cont}}^i(X_{\text{ét}}, \mathbf{Z}_l(j)) = \underline{\mathbf{H}}^i(X_{\text{ét}}, \tilde{\mathbf{Z}}_l(j)).$$

On peut définir de façon analogue des groupes de cohomologie à support $\mathbf{H}_{Z, \text{cont}}^i(X, \mathbf{Z}_l(j))$ pour un sous-ensemble fermé Z de X .

Soient K un corps et K_{sep} une clôture séparable de K et l un nombre premier inversible dans K . Alors pour tout K -schéma de type fini X , on a une suite spectrale de Hochschild–Serre [10, Remark 3.5(b)]

$$E_2^{p,q} = \mathbf{H}_{\text{cont}}^p(\text{Gal}(k_{\text{sep}}/k), \mathbf{H}_{\text{cont}}^q(X_{k_{\text{sep}}}, \mathbf{Z}_l(j))) \implies \mathbf{H}_{\text{cont}}^{p+q}(X, \mathbf{Z}_l(j)),$$

qui n'existe pas en général pour la cohomologie étale usuelle.

Supposons en outre que le corps K ait la propriété suivante : pour tout $\text{Gal}(K_{\text{sep}}/K)$ -module A qui soit fini et de l -torsion, les groupes de cohomologie $\mathbf{H}^i(K, A)$ sont finis. Alors pour tout K -schéma de type fini X , la cohomologie continue coïncide avec la cohomologie l -adique usuelle, c'est-à-dire

$$\mathbf{H}_{\text{cont}}^i(X_{\text{ét}}, \mathbf{Z}_l(j)) = \varprojlim_n \mathbf{H}^i(X_{\text{ét}}, (\mathbf{Z}/l^n \mathbf{Z})(j)) ;$$

voir [10, Remark 3.5(c)]. La condition sur K est vérifiée si K est un corps séparablement clos, un corps fini ou un corps local.

6.2. Application classe de cycle l -adique

Soit X un schéma quasi-projectif lisse sur un corps, et soit l un nombre premier inversible sur X . À tout sous-ensemble fermé irréductible Z de X , on peut associer une classe de cycle

$$\text{cl}(Z) \in \mathbb{H}_{Z, \text{cont}}^{2b}(X, \mathbf{Z}_l(b)) ;$$

voir Jannsen [10, Theorem 3.23].

Une variante de la construction du n° 4.1 permet de construire des applications classe de cycle l -adiques

$$\text{cyc}_X^{b,m} : \text{CH}^b(X, m) \rightarrow \mathbb{H}_{\text{cont}}^{2b-m}(X_{\text{ét}}, \mathbf{Z}_l(b))$$

pour b et m entiers à l'aide des classes de cycle $\text{cl}(Z)$ définies ci-dessus. Les détails sont laissés au lecteur.

6.3. Régulateur l -adique

Soit $f : X \rightarrow S$ un morphisme lisse de schémas quasi-projectifs et lisses sur un corps K . Dans [10, (3.11)], Jannsen construit une suite spectrale

$$E_2^{p,q} = \underline{\mathbb{H}}^p(S_{\text{ét}}, (\mathbb{R}^q f_*((\mathbf{Z}/l^j \mathbf{Z})(b))))_j \implies \mathbb{H}_{\text{cont}}^{p+q}(X_{\text{ét}}, \mathbf{Z}_l(b)). \quad (6.1)$$

Elle donne un homomorphisme

$$\mathbb{H}_{\text{cont}}^n(X_{\text{ét}}, \mathbf{Z}_l(b)) \rightarrow \underline{\mathbb{H}}^0(S_{\text{ét}}, (\mathbb{R}^n f_*((\mathbf{Z}/l^j \mathbf{Z})(b))))_j$$

On note $\text{CH}^b(X, m)_{S\text{-loc.}\sim 0}$ le noyau de l'application

$$\begin{aligned} \text{CH}^b(X, m) &\xrightarrow{\text{cyc}_X^{b,m}} \mathbb{H}_{\text{cont}}^{2b-m}(X_{\text{ét}}, \mathbf{Z}_l(b)) \\ &\longrightarrow \underline{\mathbb{H}}^0(S, (\mathbb{R}^{2b-m} f_*((\mathbf{Z}/l^j \mathbf{Z})(b))))_j \\ &= \varprojlim_j \Gamma(S, \mathbb{R}^{2b-m} f_*((\mathbf{Z}/l^j \mathbf{Z})(b))). \end{aligned}$$

C'est le sous-groupe de $\text{CH}^b(X, m)$ des éléments dont la classe de cohomologie est localement triviale pour la topologie étale sur S . La même suite spectrale (6.1) donne un homomorphisme

$$\text{reg}_{X/S}^{b,m} : \text{CH}^b(X, m)_{S\text{-loc.}\sim 0} \rightarrow \underline{\mathbb{H}}^1(S_{\text{ét}}, (\mathbb{R}^{2b-m-1} f_*((\mathbf{Z}/l^j \mathbf{Z})(b))))_j.$$

En particulier, dans le cas $S = \text{Spec } K$, on a

$$\underline{\mathbb{H}}^1(S_{\text{ét}}, (\mathbb{R}^{2b-m-1} f_*((\mathbf{Z}/l^j \mathbf{Z})(b))))_j = \mathbb{H}_{\text{cont}}^1(K, \mathbb{H}^{2b-m-1}(X_{K_{\text{sep}}}, \mathbf{Z}_l(b))) ;$$

voir Jannsen [10, Theorem 3.2].

6.4. La conjecture de Bloch-Kato

Soit K un corps de nombres, soit X une variété projective lisse sur K et soit l un nombre premier. Dans [5, 3.7], Bloch et Kato définissent un sous-espace \mathbf{Q}_l -linéaire dit *géométrique*

$$\mathbb{H}_{\mathbb{g}}^1(K, \mathbb{H}^{2b-m-1}(X_{\bar{K}, \text{ét}}, \mathbf{Q}_l(b))) \subseteq \mathbb{H}_{\text{cont}}^1(K, \mathbb{H}^{2b-m-1}(X_{\bar{K}, \text{ét}}, \mathbf{Q}_l(b))).$$

La conjecture suivante est l'analogie pour les groupes de Chow de la conjecture de Bloch et Kato pour les K -groupes [5, Conjecture 5.3].

Conjecture 6.1. *Soit K un corps de nombres, soit X une variété projective lisse sur K et soit l un nombre premier. Alors pour tout $b \geq 0$ et tout $m \geq 1$, l'image du régulateur l -adique*

$$\text{reg}_{X/K}^{b,m} : \text{CH}^b(X, m) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}_l \longrightarrow \mathbb{H}_{\text{cont}}^1(K, \mathbb{H}^{2b-m-1}(X_{\bar{K}, \text{ét}}, \mathbf{Q}_l(b)))$$

est égal à $\mathbb{H}_{\mathbb{g}}^1(K, \mathbb{H}^{2b-m-1}(X_{\bar{K}, \text{ét}}, \mathbf{Q}_l(b)))$.

Bibliographie

- [1] Masanori ASAKURA and Shuji SAITO, Surfaces over a p -adic field with infinite torsion in the Chow group of 0-cycles. *Algebra and Number Theory* **1** (2007), no. 2, 163–181.
- [2] Spencer BLOCH, Algebraic cycles and the Beilinson conjectures. In: *The Lefschetz centennial conference, Part I (Mexico City, 1984)*, 65–79. *Contemporary Mathematics* **58**. American Mathematical Society, Providence, RI, 1986.
- [3] Spencer BLOCH, Algebraic cycles and higher K -theory. *Advances in Mathematics* **61** (1986), 267–304.
- [4] Spencer BLOCH, The moving lemma for higher Chow groups. *Journal of Algebraic Geometry* **3** (1994), 537–568.
- [5] Spencer BLOCH and Kazuya KATO, L -functions and Tamagawa numbers of motives. In: *The Grothendieck Festschrift, Vol. I*, 333–400. *Progress in Mathematics* **86**. Birkhäuser, Boston, MA, 1990.
- [6] Spencer BLOCH and Arthur OGUS, Gersten’s conjecture and the homology of schemes. *Annales Scientifiques de l’É.N.S (4^e série)* **7** (1974), n° 2, 181–201.
- [7] Pierre DELIGNE, *Cohomologie étale (SGA 4 $\frac{1}{2}$)*. Avec la collaboration de J.F. BOUTOT, A. GROTHENDIECK, L. ILLUSIE et J.L. VERDIER. *Lecture Notes in Mathematics* **569**. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1977.
- [8] William FULTON, *Intersection Theory*. *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, Band 2*. Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- [9] Thomas GEISSER and Marc LEVINE, The Bloch–Kato conjecture and a theorem of Suslin–Voevodsky. *Journal für reine und angewandte Mathematik* **530** (2001), 55–103.
- [10] Uwe JANNSEN, Continuous étale cohomology. *Mathematische Annalen* **280** (1988), 207–245.
- [11] Marc LEVINE, Techniques of localization in the theory of algebraic cycles. *Journal of Algebraic Geometry* **10** (2001), no. 2, 299–363.
- [12] Shuji SAITO and Kanetomo SATO, A finiteness theorem for zero-cycles over p -adic fields. To appear in *Annals of Mathematics*.