Topologie, voorjaar 2015

Opgavenblad 1

werkcolleges 4 en 9 februari

In de onderstaande opgaven beschouwen we $\mathbf{R}^n$ steeds als een metrische ruimte voorzien van de euclidische metriek

$$d(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \cdots + (x_n-y_n)^2}.$$

1. Ga van de volgende deelverzamelingen van $\mathbf{R}$ na of ze open en of ze gesloten zijn.

(a) $\emptyset$;

(b) $\mathbf{R}$;

(c) $(0,\infty)$;

(d) $[0,\infty)$;

(e) (a,b) met $a,b \in \mathbf{R}$ en $a<b$;

(f) $[a,b]$ met $a,b \in \mathbf{R}$ en $a<b$;

(g) $(a,b]$ met $a,b \in \mathbf{R}$ en $a<b$;

(h) $\mathbf{Z}$;

(i) $\mathbf{Q}$;

(j) $\{n^{-1} \mid n \in \mathbf{Z}, n>0\}$.

2. Ga van de volgende deelverzamelingen van $\mathbf{R}^2$ na of ze open en of ze gesloten zijn.

(a) $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x>0\}$;

(b) $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x<0, y \geq 0\}$;

(c) $\{(x,x) \mid x \in \mathbf{R}\}$;

(d) $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid y \geq x^2\}$;

(e) $\mathbf{Z}^2$;

(f) $\{(x,\sin(1/x)) \mid x>0\}$.

3. In deze opgave laten we zien dat $\emptyset$ en $\mathbf{R}$ de enige deelverzamelingen van $\mathbf{R}$ zijn die (met betrekking tot de euclidische metriek) zowel open als gesloten zijn.

(a) Neem aan dat $U \subseteq \mathbf{R}$ zowel open als gesloten is. Laat (met behulp van de ϵ-δ-definitie) zien dat de functie

$$\begin{aligned} f\colon \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 1 & \text{als } x \in U, \\ 0 & \text{als } x \notin U \end{cases} \end{aligned}$$

continu is.

(b) Laat met behulp van de tussenwaardestelling zien dat geldt $U \in \{\emptyset, \mathbf{R}\}$.

4. Geef een oneindige collectie $\mathcal{U}$ van open deelverzamelingen van $\mathbf{R}$ zodanig dat $\bigcap_{U\in\mathcal{U}} U$ géén open deelverzameling van $\mathbf{R}$ is.

5. (Runde, 2.1.1.) Zij S een verzameling, en zij X de verzameling van alle eindige deelverzamelingen van S. Voor $A,B \in X$ definiëren we het symmetrisch verschil $A \mathbin{\triangle} B$ als

$$A \mathbin{\triangle} B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Laat zien dat de functie

$$\begin{aligned} d\colon X \times X &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (A,B) &\longmapsto \#(A \mathbin{\triangle} B) \end{aligned}$$

een metriek op X is. (We schrijven $\#E$ voor de kardinaliteit van een eindige verzameling E.)

6. Een metriek d op een verzameling F heet een *Franse-spoorwegmetriek* als er een $p \in F$ bestaat zodanig dat voor alle $x, y \in F$ geldt

$$x \neq y \implies d(x,y) = d(x,p) + d(p,y).$$

Stel dat er twee verschillende punten $p, q \in F$ bestaan met de bovenstaande eigenschap. Bewijs dat $F = \{p, q\}$.

7. Zij (X, d) een metrische ruimte. De *diameter* van een niet-lege deelverzameling $S \subseteq X$ is gedefinieerd als

$$\operatorname{diam}(S) = \sup\{d(x,y) \mid x, y \in S\} \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}.$$

Bekijk een keten van deelverzamelingen $S_0 \supseteq S_1 \supseteq S_2 \supseteq \cdots$ van X zodanig dat

$$\operatorname{diam}(S_n) \to 0 \quad \text{als } n \to \infty.$$

Bewijs dat $\bigcap_{n=0}^{\infty} S_n$ ten hoogste één punt bevat.

8. (Runde, 2.2.1.) Zij (X, d) een metrische ruimte. Laat zien dat elke eindige deelverzameling van X gesloten is.

9. Een metrische ruimte (X, d) heet *discreet* als er voor elke $x \in X$ een $\epsilon > 0$ bestaat zodanig dat $B_\epsilon(x) = \{x\}$. Bewijs dat elke eindige metrische ruimte (d.w.z. elke metrische ruimte (X, d) zodanig dat X een eindige verzameling is) discreet is.

10. (Runde, 2.2.6.) Zij (X, d) een metrische ruimte, en zij Y een deelverzameling van X. Bewijs dat een deelverzameling $U \subseteq Y$ open is in de metrische ruimte $(Y, d|_{Y \times Y})$ dan en slechts dan als er een open deelverzameling V van (X, d) bestaat zodanig dat $U = Y \cap V$.

11. Zij $\mathbf{S}^1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ de eenheidscirkel in $\mathbf{R}^2$. Gegeven twee punten $x = (x_1, x_2)$ en $y = (y_1, y_2)$ in $\mathbf{S}^1$ definiëren we $\theta(x, y) \in [0, \pi]$ als de (ongerichte) hoek tussen x en y gezien als vectoren, dus

$$\cos\theta(x,y) = x_1 y_1 + x_2 y_2.$$

Bewijs dat θ een metriek op $\mathbf{S}^1$ is.

12. Zij p een priemgetal. Voor $x \in \mathbf{Q}^\times$ definiëren we

$$\operatorname{ord}_p(x) = n \quad \text{als } x = p^n \frac{a}{b} \text{ met } a, b \in \mathbf{Z} \setminus p\mathbf{Z}$$

en voor $x \in \mathbf{Q}$ definiëren we de *p-adische absolute waarde* van x als

$$|x|_p = \begin{cases} 0 & \text{als } x = 0, \\ p^{-\operatorname{ord}_p(x)} & \text{als } x \neq 0. \end{cases}$$

(a) Laat zien dat $|\ |_p$ voldoet aan de *sterke driehoeksongelijkheid*: voor alle $x, y \in \mathbf{Q}$ geldt

$$|x + y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}.$$

(b) Laat zien dat de functie

$$\begin{aligned} d_p \colon \mathbf{Q} \times \mathbf{Q} &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (x, y) &\longmapsto |x - y|_p \end{aligned}$$

een metriek op $\mathbf{Q}$ is.