Topologie, voorjaar 2015

Opgaven werkcollege 5

2 maart 2015

1. Zijn (X, d_X) en (Y, d_Y) twee volledige metrische ruimten. We voorzien het product $X \times Y$ van de metriek

$$D((x, y), (x', y')) = d_X(x, x') + d_Y(y, y').$$

(Vgl. opgave 11 van blad 3.) Laat zien dat $(X \times Y, D)$ volledig is.

2. Een *Banachruimte* is een genormeerde $\mathbf{R}$-vectorruimte $(V, \|\ \ \|)$ die volledig is met betrekking tot de metriek d gedefinieerd door $d(x, y) = \|x - y\|$.

(a) Zij V de ruimte van continue functies $f\colon [0, 1] \to \mathbf{R}$ voorzien van de norm $\|f\| = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Laat zien dat $(V, \|\ \ \|)$ een Banachruimte is. (Hint: continue functies op $[0, 1]$ zijn begrensd.)

(b) Laat zien dat elke eindigdimensionale genormeerde $\mathbf{R}$-vectorruimte $(V, \|\ \ \|)$ een Banachruimte is.

(c) Zij $V = \bigoplus_{n\ge0} \mathbf{R}$ de vectorruimte van alle rijtjes $(x_n)_{n\ge0}$ met $x_n \in \mathbf{R}$ zodanig dat er een $N \ge 0$ bestaat met $x_n = 0$ voor alle $n \ge N$, voorzien van de norm

$$\|(x_n)_{n\ge0}\| = \left(\sum_{n\ge0} x_n^2\right)^{1/2}.$$

Laat zien dat V geen Banachruimte is.

3. (Runde, 3.1.6.) Voor alle $a, b \in \mathbf{Z}$ met $b > 0$ definiëren we

$$N_{a,b} = \{a + nb \mid n \in \mathbf{Z}\}.$$

Voor $a \in \mathbf{Z}$ definiëren we $\mathfrak{N}_a$ als de verzameling van alle deelverzamelingen $N \subseteq \mathbf{Z}$ zodanig dat er een $b > 0$ is met $N_{a,b} \subseteq N$.

(a) Bewijs dat er een unieke topologie $\mathcal{T}$ op $\mathbf{Z}$ is zodanig de omgevingen van $a \in \mathbf{Z}$ met betrekking tot $\mathcal{T}$ precies de elementen van $\mathfrak{N}_a$ zijn. (Hint: Theorem 3.1.10 in het boek.)

(b) Bewijs dat elke open deelverzameling van $(\mathbf{Z}, \mathcal{T})$ ofwel oneindig ofwel leeg is.

(c) Bewijs dat alle verzamelingen $N_{a,b}$ zowel open als gesloten zijn.

(d) Bewijs dat $\mathbf{Z} \setminus \{-1, 1\}$ de vereniging is van de verzamelingen $N_{0,p}$ met p een priemgetal.

(e) Leid uit de eerdere onderdelen af dat er oneindig veel priemgetallen zijn.

4. Bewijs dat er een unieke topologie op $\mathbf{R}^2$ bestaat waarvoor de gesloten verzamelingen precies de eindige verenigingen van punten en lijnen zijn.

5. Zij $f\colon X \to Y$ een continue afbeelding van topologische ruimten. Zijn $X' \subseteq X$ en $Y' \subseteq Y$ deelverzamelingen zodanig dat $f(X') \subseteq Y'$. Bewijs dat de door f geïnduceerde afbeelding $f'\colon X' \to Y'$ continu is.

6. Zijn X, Y topologische ruimten, en zij $f\colon X \to Y$ een afbeelding.

(a) Zijn X_1, X_2 open deelverzamelingen van X zodanig dat $X = X_1 \cup X_2$ en zodanig dat de beperkingen $f|_{X_1}\colon X_1 \to Y$ en $f|_{X_2}\colon X_2 \to Y$ continu zijn. Bewijs dat f continu is.

(b) Zelfde vraag met "gesloten" in plaats van "open".

7. Zijn $(X, \mathcal{T}_X)$ en $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische ruimten. Een afbeelding $f\colon X \to Y$ heet *open* als voor elke open deelverzameling $U \subseteq X$ het beeld $f(U) \subseteq Y$ een open deelverzameling van Y is.

(a) Geef een voorbeeld van een continue afbeelding die niet open is.

(b) Geef een voorbeeld van een open afbeelding die niet continu is.

8. Een *Hausdorffruimte* is een topologische ruimte $(X, \mathcal{T})$ zodanig dat er voor alle $x, y \in X$ met $x \neq y$ open omgevingen U van x en V van y bestaan met $U \cap V = \emptyset$.

(a) Laat zien dat als $(X, \mathcal{T})$ een Hausdorffruimte is en $x \in X$, de deelverzameling $\{x\} \subseteq X$ gesloten is.

(b) Laat zien dat elke topologische deelruimte van een Hausdorffruimte weer een Hausdorffruimte is.

9. Een topologische ruimte $(X, \mathcal{T})$ heet *samenhangend* als X precies twee deelverzamelingen heeft die zowel open als gesloten zijn.

(a) Laat zien dat $(X, \mathcal{T})$ samenhangend is dan en slechts dan als $X \neq \emptyset$ en de enige deelverzamelingen van X die zowel open als gesloten zijn, de verzamelingen $\emptyset$ en X zijn.

(b) We voorzien $\{0, 1\}$ van de discrete topologie $\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$. Laat zien dat $(X, \mathcal{T})$ samenhangend is dan en slechts dan als er precies twee continue afbeeldingen van $(X, \mathcal{T})$ naar $\{0, 1\}$ zijn.