Topologie, voorjaar 2015

Opgaven werkcolleges 9 en 10

20 en 22 april 2015

1. Laat zien dat de volgende topologische ruimten wegsamenhangend zijn:

(a) de ruimte $X = \{p, q\}$ voorzien van de topologie $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{p\}, \{p, q\}\}$;

(b) de eenheidscirkel $S^1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$;

(c) de eenheidsbol $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

2. Zij X een topologische ruimte, en zijn $\gamma_1, \gamma_2\colon [0, 1] \to X$ continue afbeeldingen zodanig dat $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$. Bewijs dat de afbeelding

$$\begin{aligned} \gamma_1 \odot \gamma_2\colon [0,1] &\longrightarrow X \\ t &\longmapsto \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{als } 0 \le t \le 1/2, \\ \gamma_2(2t-1) & \text{als } 1/2 \le t \le 1 \end{cases} \end{aligned}$$

continu is. (Dit laat zien dat wegen aaneengeschakeld kunnen worden.)

3. Zij X een topologische ruimte, en zijn $A, B \subseteq X$ wegsamenhangende deelverzamelingen zodanig dat $A \cap B$ niet-leeg is.

(a) Is $A \cap B$ noodzakelijk wegsamenhangend? Geef een bewijs of een tegenvoorbeeld.

(b) Is $A \cup B$ noodzakelijk wegsamenhangend? Geef een bewijs of een tegenvoorbeeld.

4. Zij X een topologische ruimte die slechts eindig veel samenhangscomponenten heeft. Bewijs dat de samenhangscomponenten zowel open als gesloten zijn.

5. Beschrijf voor elk van de volgende topologische ruimten (met de voor de hand liggende topologie, tenzij anders vermeld) de samenhangscomponenten:

(a) $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$;

(b) een triviale (= chaotische) topologische ruimte X;

(c) een discrete topologische ruimte X;

(d) $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \in \mathbf{Z} \text{ of } y \in \mathbf{Z}\}$;

(e) $\mathbf{C}$ met de co-eindige topologie (= Zariskitopologie; de gesloten verzamelingen zijn de eindige verzamelingen en $\mathbf{C}$ zelf);

(f) $\mathbf{Q}$;

(g) $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$;

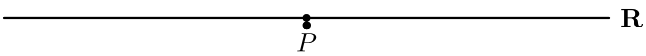
(h) $\mathbf{R}^2 \setminus \mathbf{Q}^2$.

Zijn deze samenhangscomponenten tevens de wegsamenhangscomponenten?

6. Zij X de verzameling $\mathbf{R} \cup \{P\}$ (met $P \notin \mathbf{R}$) voorzien van de topologie $\mathcal{T}$ waarvan een basis $\mathcal{B}$ gegeven wordt door

$$\begin{aligned} \mathcal{B} = \{U \mid U &\text{ is open in } \mathbf{R}\,\} \\ &\cup \{(U \setminus \{0\}) \cup \{P\} \mid U \text{ is een open omgeving van } 0 \text{ in } \mathbf{R}\}. \end{aligned}$$

Dit is een "lijn met een verdubbeld punt":



(a) Laat zien dat X geen Hausdorffruimte is.

(b) Laat zien dat X wegsamenhangend is.

7. Zij X een lokaal samenhangende topologische ruimte, en zij $Y \subseteq X$ een deelruimte. Laat zien dat de volgende uitspraken equivalent zijn:

(1) Y is een vereniging van samenhangscomponenten van X;

(2) er bestaat een continue functie $f\colon X \to \{0,1\}$ zodanig dat voor alle $x \in X$ geldt

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x \in Y \\ 1 & \text{als } x \notin Y. \end{cases}$$

8. (Vgl. Runde, 3.4.2 en 3.4.4.) Zijn X en Y topologische ruimten.

(a) Bewijs dat $X \times Y$ wegsamenhangend is dan en slechts dan als X en Y het zijn.

(b) Bewijs dat $X \times Y$ samenhangend is dan en slechts dan als X en Y het zijn. (*Hint:* gebruik continue functies naar $\{0,1\}$.)

Een topologische ruimte $(X, \mathcal{T})$ heet *totaal onsamenhangend* als elke samenhangscomponent van $(X, \mathcal{T})$ uit slechts één punt bestaat, d.w.z. als voor alle $x \in X$ de samenhangscomponent van x gelijk is aan $\{x\}$.

9. Bewijs dat de onderstaande topologische ruimten totaal onsamenhangend zijn:

(a) elke discrete topologische ruimte;

(b) $\mathbf{Q}$ met de deelruimtetopologie van $\mathbf{R}$;

(c) $\prod_{n\ge 1}\{0,1\}$ met de producttopologie ($\{0,1\}$ heeft de discrete topologie).

10. (Runde, 3.4.9.) Zijn X en Y topologische ruimten met X samenhangend en Y totaal onsamenhangend. Bewijs dat elke continue afbeelding $X \to Y$ constant is.

11. Zij $(X, \mathcal{T})$ een topologische ruimte. Stel dat er voor elk tweetal verschillende punten $x, y \in X$ een continue functie $f\colon X \to \{0,1\}$ bestaat die voldoet aan $f(x) = 0$ en $f(y) = 1$. Laat zien dat $(X, \mathcal{T})$ een totaal onsamenhangende Hausdorffruimte is.

12. (Runde, 3.4.12.) Laat zien dat de samenhangende topologische ruimte

$$X = \{(x, \sin(1/x) \mid x > 0\} \cup \{(0, y) \mid -1 \le y \le 1\}$$

niet lokaal samenhangend is.

13. Zij $q\colon X \to Q$ een surjectieve afbeelding van verzamelingen, en zij $\mathcal{T}$ een topologie op X. We definiëren

$$\mathcal{T}_Q = \{U \subseteq Q \mid q^{-1}U \in \mathcal{T}\}.$$

(a) Bewijs dat $\mathcal{T}_Q$ een topologie op Q is.

(b) Bewijs dat $\mathcal{T}_Q$ de fijnste topologie op Q is waarvoor de afbeelding $q\colon X \to Q$ continu is.

De topologie $\mathcal{T}_Q$ heet de *quotiënttopologie* voor de afbeelding $q\colon X \to Q$. Deze wordt vaak toegepast in de situatie waarin X van een equivalentierelatie $\sim$ voorzien is, Q de verzameling $X/{\sim}$ is en $q\colon X \to X/{\sim}$ de quotiëntafbeelding is.

(c) Zij X een topologische ruimte, zij $\sim$ een equivalentierelatie op X en zij $q\colon X \to Q$ de quotiëntafbeelding, waarbij $Q = X/{\sim}$ voorzien is van de quotiënttopologie. Bewijs dat $q\colon X \to Q$ de volgende *universele eigenschap* heeft. Zij Y een topologische ruimte, en zij $f\colon X \to Y$ een continue afbeelding met de eigenschap dat voor alle $x, x' \in X$ met $x \sim x'$ geldt $f(x) = f(x')$. Dan is er een unieke continue afbeelding $g\colon Q \to Y$ zodanig dat $f = g \circ q$.

14. Zij X een topologische ruimte, en zij $\mathcal{F}$ de verzameling van alle continue functies $f\colon X \to \{0,1\}$, waarbij $\{0,1\}$ de discrete topologie heeft. Zij $\sim_{\mathrm{q}}$ de relatie op X gedefinieerd als volgt: $x \sim_{\mathrm{q}} y$ dan en slechts dan als voor alle $f \in \mathcal{F}$ geldt $f(x) = f(y)$.

(a) Laat zien dat $\sim_{\mathrm{q}}$ een equivalentierelatie op X is.

Een *quasicomponent* van X (resp. de *quasicomponent van* $x \in X$) is een equivalentieklasse van $\sim_{\mathrm{q}}$ (resp. de klasse die x bevat).

(b) Zij $x \in X$. Zij P_x de padsamenhangscomponent van x, zij C_x de samenhangscomponent van x, en zij Q_x de quasicomponent van x. Bewijs dat $P_x \subseteq C_x \subseteq Q_x$.

15. Zij Y de deelruimte $\{1/n \mid n \in \{1,2,3,\ldots\}\} \cup \{0, P\}$ van de topologische ruimte X uit opgave 6.

(a) Laat zien dat Y totaal onsamenhangend is.

(b) Laat zien dat Y een quasicomponent heeft die uit twee punten bestaat.

De *Cantorverzameling* is een topologische deelruimte $C \subset \mathbf{R}$ die als volgt gedefinieerd is. We schrijven

$$\begin{aligned} C_1 &= [0,1], \\ C_2 &= [0,1/3] \cup [2/3,1], \\ C_3 &= [0,1/9] \cup [2/9,1/3] \cup [2/3,7/9] \cup [8/9,1], \end{aligned}$$

enzovoorts; C_{n+1} wordt steeds geconstrueerd door uit elk van de intervallen waaruit C_n bestaat het (open) middelste derde deel weg te laten. Vervolgens definiëren we

$$C = \bigcap_{n \geq 1} C_n.$$

De verzamelingen C_1, C_2, $\ldots$, C_7 zijn hieronder weergegeven.

16. Zij $C \subset \mathbf{R}$ de Cantorverzameling. In deze opgave bestuderen we eigenschappen van C.

(a) Laat zien dat C compact is.

(b) Laat zien dat C totaal onsamenhangend is.

(c) Laat zien dat het inwendige van C in $\mathbf{R}$ leeg is.

(d) Laat zien dat C gelijk is aan de verzameling reële getallen die geschreven kunnen worden als $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$ met $a_n \in \{0,2\}$ voor alle $n \geq 1$.

(e) Leid uit (d) af dat C dezelfde kardinaliteit als $\mathbf{R}$ heeft.

17. Zij $X = \prod_{n \geq 1} \{0,2\}$, waar $\{0,2\}$ de discrete topologie heeft en X de producttopologie. Het doel van deze opgave is om te laten zien dat C en X homeomorf zijn.

(a) Laat zien dat de afbeelding

$$\begin{aligned} X &\longrightarrow C \\ (a_n)_{n \geq 1} &\longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \end{aligned}$$

continu en bijectief is.

(b) Leid uit (a) af dat C en X homeomorf zijn. (*Hint:* C en X zijn compacte Hausdorffruimten.)