Topologie uitwerking tentamen 13-06-2014

June 10, 2015

Opgave 1

Geef (zonder bewijs) van de volgende deelruimten van $\mathbb{R}^n$ aan of ze open, gesloten, compact en/of samenhangend zijn.

(a) $\{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{Z}_{>0}\}$ in $\mathbb{R}$.

(b) $\{x \in \mathbb{R}^2 : d(x, (-1, 0)) + d(x, (1, 0)) \leq \pi\}$ in $\mathbb{R}^2$.

(c) $\{(x, \sin(1/x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0, 1]\} \cup \{0\}$ in $\mathbb{R}^2$.

(d) $\{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : ad - bc \neq 0\}$ in $\mathbb{R}^4$.

Oplossing:

Bij deze opgave is voldoende om ja of nee te beantwoorden, deze argumentatie is puur om een idee te geven waar je het moet zoeken.

(a) Deze verzameling is niet open, wel gesloten, wel compact en niet samenhangend. Reden: het is een aftelbare deelverzameling van $\mathbb{R}$, en kan dus niet open zijn. Wel gesloten, want elk element in het complement in $[0, 1]$ ligt tussen twee breuken in. Gesloten en begrensd in $\mathbb{R}$ impliceert compact. Niet samenhangend, want je zou een niet-constante continue afbeelding naar $\{0, 1\}$ kunnen maken door een sprong tussen twee breuken in te maken.

(b) Deze verzameling is niet open, wel gesloten, wel compact en wel samenhangend. Reden: We kunnen een continue afbeelding $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ maken door $x \mapsto d(x, (-1, 0)) + d(x, (1, 0))$, dan is de gegeven verzameling het inverse beeld van $\mathbb{R}_{\leq \pi}$ en daarmee gesloten. Aangezien die noch leeg nog heel $\mathbb{R}^2$ is, is die daarmee niet open. Gesloten en begrensd impliceert compact.

(c) Deze verzameling is niet open, niet gesloten, niet compact en wel samenhangend. Reden: het is een kromme door de $\mathbb{R}^2$, dus om een punt hierop is geen bolletje te vinden die op de kromme blijft. Gesloten lukt niet omdat elk punt in $\mathbb{R} \times [-1, 1]$ behalve 0 willekeurig veel punten van de kromme in kleine bolletjes heeft liggen. Daarmee ook niet compact. Samenhangend want dit is de topologist's sine curve, een bekend tegenvoorbeeld van samenhangend impliceert niet wegsamenhangend.

(d) Deze verzameling is open, niet gesloten, niet compact en niet samenhangend. Reden: beschouw de continue afbeelding $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}, (a, b, c, d) \mapsto ad - bc$. Het inverse beeld van $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ is open. Hiermee is de gegeven verzameling niet gesloten en niet compact. Niet samenhangend want we kunnen een continue afbeelding maken die $(a, b, c, d) \mapsto 0$ als $ad - bc < 0$ en $(a, b, c, d) \mapsto 1$ als $ad - bc > 0$.

Opgave 2

Zij (X, d) een metrische ruimte, $(x_n)_{n\geq 0} \subset X$ een rij en $x \in X$.

(a) Geef een definitie van "$(x_n)_{n\geq 0}$ convergeert naar x".

(b) Zij $F \subset X$ gesloten. Neem aan dat $x_n \in F$ voor alle n en dat $(x_n)_{n\geq 0}$ naar x convergeert. Laat zien dat $x \in F$.

Oplossing:

(a) De rij (x_n) convergeert naar x als voor alle $\varepsilon > 0$ een N bestaat zo dat voor alle $n \geq N$ geldt $x_n \in B_\varepsilon(x)$. (Of een equivalente definitie).

(b) Stel dat $x \notin F$. Omdat $X\backslash F$ open is, geldt dat er een $\varepsilon > 0$ is zo dat $B_\varepsilon(x) \cap F = \varnothing$. Maar dan is er dus geen N zo dat voor alle $n \geq N$ geldt $x_n \in B_\varepsilon(x)$, wegens de aanname dat $x_n \in F$ voor alle n. Dit is in tegenspraak met de convergentie, dus $x \in F$.

Opgave 3

Zij (X, d_X) en (Y, d_Y) metrische ruimten. Beschouw op de verzameling $X \times Y$ de metriek

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)\}$$

Zij $\mathcal{T}_1$ de producttopologie op $X \times Y$ en $\mathcal{T}_2$ de topologie geinduceerd door d. Laat zien dat $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.

Oplossing:

Het is voldoende te laten zien dat elke basisopen van $\mathcal{T}_1$ te schrijven is als vereniging van basisopens van $\mathcal{T}_2$ en andersom.

Een basisopen van $\mathcal{T}_1$ is van de vorm $U \times V$, waarbij U, V open zijn in X resp. Y. We kunnen dit verder vereenvoudigen door te stellen dat dit open bolletjes in X resp. Y zijn, dus laat $U = B^X_\delta(x_0)$ en $V = B^Y_\varepsilon(y_0)$. Stel $(x, y) \in U \times V$. Omdat U en V open zijn, zijn er δ_0, ε_0 zo dat $B_{\delta_0}(x) \subset U$ en $B_{\varepsilon_0}(y) \subset V$. Zijn $\varepsilon_1 = \min\{\delta_0, \varepsilon_0\}$, dan is $B^{X\times Y}_{\varepsilon_1}(x, y) \subset U \times V$. Dus $U \times V \in \mathcal{T}_2$.

Stel dat we een bolletje $U := B^{X\times Y}_\varepsilon(x_0, y_0)$ hebben, laat weer $(x, y) \in U$. Er is een $\varepsilon_0 > 0$ zo dat $B^{X\times Y}_{\varepsilon_0}(x, y) \subset U$ omdat U open is. Stel dat $x' \in B^X_{\varepsilon_0}(x)$ en $y' \in B^Y_{\varepsilon_0}(y)$, dan geldt $d_X(x', x), d_Y(y', y) < \varepsilon$, dus $d((x', y'), (x, y)) < \varepsilon$. Dit bewijst $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$.

Opgave 4

Beschouw op $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ de equivalentierelatie $\sim$ gegeven door $x \sim y$ dan en slechts dan als $x/y \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Zij X de quotientruimte $\mathbb{C}\backslash\{0\}/\sim$.

(a) Laat zien dat X compact is.

(b) Laat zien dat $f : X \to S^1, [z] \mapsto z/\overline{z}$ welgedefinieerd en continu is.

(c) Laat zien dat f een homeomorfisme is.

(d) Beschouw het pad $a : [0, 1] \to X, t \mapsto [e^{\pi i t}]$. Bewijs dat $[a]$ de groep $\pi_1(X, [1])$ voortbrengt.

Oplossing:

(a) Stel dat $[x] \in X$. Laat $x \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ een representant, dan is $\frac{x}{|x|} \in S^1 \subset \mathbb{C}$. Verder geldt $x/\frac{x}{|x|} = |x| \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, dus $\frac{x}{|x|} \sim x$. Dus als $\pi : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to X$ de quotientafbeelding is, dan is $\pi(S^1) = X$. Omdat π continu en S^1 compact is, volgt dat X compact is.

(b) Omdat complex geconjugeerden dezelfde norm hebben, is het codomein goed. Stel dat $w \sim z$. Dan is $w/z \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Als we schrijven $w = re^{i\varphi}$, $z = se^{i\theta}$, voor $\varphi, \theta \in (-\pi, \pi]$. Dan is $\varphi - \theta = 0$, omdat $w/z \in \mathbb{R}$. Dus $\varphi = \theta$, en

$$\frac{w}{\overline{w}} = \frac{e^{i\varphi}}{e^{-i\varphi}} = e^{2i\varphi}$$

Soortgelijk voor θ. De afbeelding f is dus welgedefinieerd omdat $\varphi = \theta$.

Een basisopen op de eenheidscirkel kunnen we beschrijven als

$$U = \{e^{i\varphi} \in S^1 : \varphi \in (\theta, \theta + \varepsilon)\}$$

voor een of andere hoek θ en een constante ε. Het inverse beeld onder f is de verzameling klassen

$$\{[e^{i\varphi}] \in X : \varphi \in (\theta, \theta + \varepsilon)\}$$

Dit hoort bij een open deel in $\mathbb{C}$, namelijk de verzameling

$$\{re^{i\varphi} \in \mathbb{C} : \varphi \in (\theta, \theta + \varepsilon), r \in \mathbb{R}\}$$

Dus f is continu wegens de quotienttopologie op X.

(c) Omdat X compact is en S^1 Hausdorff, en we weten al dat f continu is, hoeven we enkel bijectiviteit aan te tonen. In de vorige opgave hebben we aangetoond dat de afbeelding f in feite de hoek verdubbeld. Surjectiviteit volgt daarom door de klasse $[e^{i\frac{\varphi}{2}}]$ te beschouwen als we $e^{i\varphi} \in S^1$ willen bereiken. Injectiviteit hebben we doordat als $e^{2i\varphi_1} = e^{2i\varphi_2}$, dan ligt hun quotient in $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, en waren hun klassen in X dus gelijk.

(d) Het pad a correspondeert via f met het pad in S^1 met voorschrift $t \mapsto e^{2\pi i t}$. De afbeelding f_* is een isomorfisme tussen fundamentaalgroepen, dus omdat de klasse van dit pad in S^1 correspondeert met 1 in $\mathbb{Z}$, en dus een voortbrenger is, brengt $[a]$ de gegeven fundamentaalgroep voort.

Opgave 5

Zij $(X, \mathcal{T})$ een topologische ruimte. Beschouw de verzameling

$$\mathcal{T}' := \{U \in \mathcal{T} : X\backslash U \text{ is compact in } (X, \mathcal{T})\} \cup \{\varnothing\}$$

(a) Bewijs dat $\mathcal{T}'$ een topologie is op X.

(b) Laat zien dat $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$ dan en slecht dan als X compact is.

Oplossing:

(a) Aangezien $\varnothing$ compact is, zitten zowel $\varnothing$ als X in $\mathcal{T}'$. Stel $U_i \in \mathcal{T}'$ voor $i \in I$. Dan is voor elke i de ruimte $X\backslash U_i$ compact. Er geldt dat

$$X\backslash\bigcup_i U_i = \bigcap X\backslash U_i$$

gesloten is in $(X, \mathcal{T})$ en een deelverzameling van elke U_i. Omdat gesloten in een compacte ruimte compact impliceert, volgt dat $\bigcup_i U_i \in \mathcal{T}'$. Stel tenslotte dat $U_1, U_2 \in \mathcal{T}'$, dan is

$$X \backslash (U_1 \cap U_2) = (X \backslash U_1) \cup (X \backslash U_2)$$

een eindige vereniging van compacta, waarmee compact. Er volgt dat $\mathcal{T}'$ een topologie is.

(b) Als $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$ dan is voor elke niet-lege $U \in \mathcal{T}$ de verzameling $X \backslash U$ compact. Laat $(U_i)_{i \in I}$ een open overdekking van X, dan is $\bigcup_i U_i = X$, en dus is $\bigcup_i U_i \backslash U_0 = X \backslash U_0$ compact. Er bestaat dus een eindige deeloverdekking van deze ruimte, stop dan U_0 er weer bij en we hebben een eindige deeloverdekking van X gevonden. Stel dat X compact is. Per definitie is $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$, dus laat $U \in \mathcal{T}$. Stel dat $(U_i)_{i \in I} \subset \mathcal{T}$ een open overdekking van $X \backslash U$ is, dan is $(U_i)_{i \in I} \cup U$ er een van X. Neem een eindige deeloverdekking, dan vinden we op die manier een eindige deeloverdekking van $X \backslash U$.

Opgave 6

Laat zien dat de sfeer $S^2 = \{(x, y, z) \in R^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ en de gesloten schijf $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ niet homeomorf zijn.

Oplossing:

Een homeomorfisme $f : S^2 \to D$ levert door restrictie een homeomorfisme $h : S^2 \backslash \{x\} \to D \backslash \{f(x)\}$ op voor elke $x \in S^2$ waarvoor $f(x)$ niet op de rand van D ligt. Het geinduceerde groepshomomorfisme h_* is hierdoor een isomorfisme. Maar S^2 is samentrekbaar, en heeft triviale fundamentaalgroep, terwijl D homotopie-equivalent is met S^1 en daardoor fundamentaalgroep $\mathbb{Z}$ heeft. Een isomorfisme tussen 1 en $\mathbb{Z}$ levert de tegenspraak op.