UITWERKING TENTAMEN TOPOLOGIE

Vrijdag 12 juni 2015, 14:00–17:00

(16 pt) **1.** De gegeven deelruimten hebben de volgende eigenschappen:

	W	X	Y	Z
volledig	nee	ja	ja	nee
compact	nee	ja	nee	nee
wegsamenhangend	ja	ja	nee	ja
dicht in $\mathbf{R}^2$	ja	nee	nee	nee

(12 pt) **2.** (a) Stel X is volledig en Y is gesloten in X. Zij $(x_n)_{n\geq 0}$ een Cauchyrij in Y. We beschouwen $(x_n)_{n\geq 0}$ als rij in X; dit is nog steeds een Cauchyrij. Wegens de volledigheid van X convergeert de rij. Omdat Y gesloten is in X, heeft elke rij in Y die in X convergeert haar limiet in Y. Hieruit volgt dat $(x_n)_{n\geq 0}$ in Y convergeert. We concluderen dat Y volledig is.

(b) Als X compact is, dan is Y niet noodzakelijk compact. Neem bijvoorbeeld $X = [0, 1]$ en $Y = (0, 1)$ (als deelruimten van $\mathbf{R}$ met de euclidische topologie). Omdat de compacte deelverzamelingen van $\mathbf{R}$ precies de gesloten en begrensde deelverzamelingen zijn, is X wel compact, maar Y niet.

(12 pt) **3.** (a) Elke deelruimte van een Hausdorffruimte is zelf ook een Hausdorffruimte. Zij namelijk X een Hausdorffruimte en Y een deelruimte van X. Gegeven twee punten $y, y' \in Y$ bestaan er (per definitie van Hausdorffruimten) disjuncte open omgevingen U van y en U' van y' in X. Wegens de definitie van de deelruimtetopologie zijn $V = U \cap Y$ en $V' = U' \cap Y$ open in Y. Bovendien geldt $y \in V$, $y' \in V'$ en $V \cap V' = \emptyset$, dus V en V' zijn disjuncte open omgevegen van y respectievelijk y' in Y. We concluderen dat Y een Hausdorffruimte is.

(b) Zij $X = \{p, q, r\}$ een verzameling met drie elementen. Er zijn verschillende topologieën $\mathcal{T}$ op X zodanig dat $(X, \mathcal{T})$ geen Hausdorffruimte is; de eenvoudigste is de triviale (chaotische) topologie $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$. Een ander voorbeeld is $\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{Y \subseteq X \mid p \in Y\}$.

(16 pt) **4.** (a) Zij $(X, \mathcal{T})$ een topologische ruimte, en zijn $Y, Z \subseteq X$ twee deelruimten die dicht zijn in X. Stel dat Y en Z open zijn in X; we beweren dat $Y \cap Z$ dicht is in X.

Waarschuwing: het eenregelige argument

$$\overline{Y \cap Z} = \bar{Y} \cap \bar{Z} = X \cap X = X$$

is niet correct, omdat de eerste gelijkheid niet voor willekeurige open deelverzamelingen geldt (neem bijvoorbeeld $Y = (-1, 0)$ en $Z = (0, 1)$ in $\mathbf{R}$).

We gebruiken het volgende (eenvoudig te bewijzen) feit: een deelruimte $T \subseteq X$ is dicht in X dan en slechts dan als voor elke niet-lege open deelverzameling $U \subseteq X$ geldt $U \cap T \neq \emptyset$. Zij U een niet-lege open deelverzameling van X. Omdat Y open is, is $V = Y \cap U$ een open deelverzameling van X. Omdat Y bovendien dicht is in X, geldt $Y \cap U \neq \emptyset$. Omdat Z dicht is in X, volgt hieruit $V \cap Z \neq \emptyset$. Dit geeft

$$U \cap (Y \cap Z) = (U \cap Y) \cap Z = V \cap Z \neq \emptyset.$$

Voor elke niet-lege open deelverzameling U van X geldt dus $U \cap (Y \cap Z) \neq \emptyset$. We concluderen dat $Y \cap Z$ is dicht in X.

(b) We nemen $X = \mathbf{R}$, $Y = \mathbf{Q}$ en $Z = \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$. Aangezien elk niet-leeg open interval zowel elementen van $\mathbf{Q}$ als van $\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$ bevat, zijn Y en Z dicht in X. De doorsnede $Y \cap Z$ is echter leeg, dus dit is een voorbeeld van een topologische ruimte $(X, \mathcal{T})$ en twee dichte deelruimten Y en Z zodanig $Y \cap Z$ *niet* dicht is in X.

(16 pt) **5.** Zij $f\colon X \to Y$ een continue afbeelding tussen topologische ruimten, en zij

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in X\} \subseteq X \times Y.$$

(a) We bekijken de afbeelding

$$\begin{aligned} g\colon X &\to X \times Y \\ x &\mapsto (x, f(x)). \end{aligned}$$

Omdat de samenstellingen $p_1 \circ g$ en $p_2 \circ g$ (met $p_1\colon X \times Y \to X$ en $p_2\colon X \times Y \to Y$ de projecties op de eerste en tweede coördinaat) continu zijn, is g continu. Het beeld van g is Γ_f, dus we kunnen g beschouwen als continue afbeelding $X \to \Gamma_f$. Verder definiëren we

$$\begin{aligned} h\colon \Gamma_f &\to X \\ (x, y) &\mapsto x. \end{aligned}$$

Dan is h de samenstelling van de inclusie $\Gamma_f \to X \times Y$ en de projectie p_1, en is dus continu. We merken op dat voor alle $(x, y) \in \Gamma_f$ geldt

$$g(h(x, y)) = g(x) = (x, f(x)) = (x, y)$$

en dat voor alle $x \in X$ geldt

$$h(g(x)) = h(x, f(x)) = x.$$

De afbeelding g is dus een continue bijectie met continue inverse h, met andere woorden een homeomorfisme van X naar Γ_f.

(b) Stel dat Y een Hausdorffruimte is. Om te bewijzen dat Γ_f gesloten is, construeren we voor elk punt $(x, y) \in (X \times Y) \setminus \Gamma_f$ een open omgeving van (x, y) in $X \times Y$ die disjunct is met Γ_f. Voor $(x, y) \notin \Gamma_f$ zijn de punten y en $f(x)$ in Y verschillend. Aangezien Y een Hausdorffruimte is, bestaan er disjuncte open omgevingen V van y en W van $f(x)$ in Y. Zij $U = f^{-1}W$; wegens de continuïteit van f is dit een open omgeving van x in X. De verzameling $U \times V$ is nu een open omgeving van (x, y) in $X \times Y$. Voor alle $(u, v) \in U \times V$ geldt $f(u) \in W$ en $v \notin W$, dus $v \neq f(u)$ en $(u, v) \notin \Gamma_f$. Dit betekent dat $U \times V$ disjunct is met Γ_f.

Alternatief bewijs: omdat Y een Hausdorffruimte is, is de diagonaal $\Delta = \{(y, y) : y \in Y\}$ gesloten in $Y \times Y$. Verder is Γ_f het inverse beeld van Δ onder de continue afbeelding

$$\begin{aligned} X \times Y &\longrightarrow Y \times Y \\ (x, y) &\longmapsto (f(x), y) \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat Γ_f gesloten is in $X \times Y$.

(16 pt) **6.** (a) Een topologische ruimte X heet *samentrekbaar* als de identieke afbeelding $x \mapsto x$ op X homotoop is met een constante afbeelding $x \mapsto x_0$ voor een zekere $x_0 \in X$.

(b) Zij $f\colon X \to Y$ een continue afbeelding van topologische ruimten. Stel dat X samentrekbaar is, en zij $F\colon [0, 1] \times X \to X$ een homotopie van de identiteit op X naar een constante afbeelding met beeld $\{x_0\}$. Bekijk de afbeelding

$$\begin{aligned} H\colon [0, 1] \times X &\longrightarrow Y \\ (t, x) &\longmapsto f(F(t, x)). \end{aligned}$$

Dan is H een samenstelling van twee continue afbeeldingen en is dus continu. Voor alle $x \in X$ geldt $H(0,x) = f(x)$ en $H(1,x) = f(x_0)$. Dit betekent dat H een homotopie is van f naar de constante afbeelding met beeld $\{f(x_0)\}$.

Stel nu dat Y samentrekbaar is, en zij $G\colon [0,1] \times Y \to Y$ een homotopie van de identiteit op Y naar een constante afbeelding met beeld $\{y_0\}$. Bekijk de afbeelding

$$\begin{aligned} I\colon [0,1] \times X &\longrightarrow Y \\ (t,x) &\longmapsto G(t, f(x)). \end{aligned}$$

Dan is I continu (hier moet wel een argument voor gegeven worden), en voor alle $x \in X$ geldt $I(0,x) = f(x)$ en $I(1,x) = y_0$. Dit betekent dat I een homotopie is van f naar de constante afbeelding met beeld $\{y_0\}$.

(16 pt) **7.** (a) Zij $X = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 < x^2+y^2 \le 3\}$. We beweren dat X homotopie-equivalent is met de eenheidscirkel S^1. Bekijk de afbeeldingen

$$\begin{aligned} f\colon X &\longrightarrow S^1 \\ (x,y) &\longmapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x,y) \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} g\colon S^1 &\longrightarrow X \\ (x,y) &\longmapsto \sqrt{2}(x,y). \end{aligned}$$

We beweren dat dit homotopie-equivalenties zijn. De afbeelding $g \circ f\colon X \to X$ is gegeven door

$$(g \circ f)(x,y) = \sqrt{\frac{2}{x^2+y^2}}(x,y)$$

en er is een homotopie F van $g \circ f$ naar id_X gegeven door

$$\begin{aligned} F\colon [0,1] \times X &\longrightarrow X \\ (t,(x,y)) &\longmapsto \left(t + (1-t)\sqrt{\frac{2}{x^2+y^2}}\right)(x,y). \end{aligned}$$

De afbeelding $f \circ g\colon S^1 \to S^1$ is de identiteit op S^1. We concluderen dat X en S^1 homotopie-equivalent zijn, en in het bijzonder dat de fundamentaalgroep $\pi_1(X, (\sqrt{2}, 0))$ isomorf is met $\pi_1(S^1, (1,0)) \cong \mathbf{Z}$.

(b) Zij $Y = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2 = z^2\}$ en $y_0 = (0,0,0)$. Dan is Y samentrekbaar: de continue afbeelding

$$\begin{aligned} G\colon [0,1] \times Y &\longrightarrow Y \\ (t,(x,y,z)) &\longmapsto (1-t)(x,y,z) \end{aligned}$$

is een homotopie van id_Y naar de constante afbeelding met beeld $\{y_0\}$. Hieruit volgt dat elke lus in Y met basispunt y_0 weghomotoop is met de constante lus met beeld $\{y_0\}$. Dit betekent dat de fundamentaalgroep $\pi_1(Y, y_0)$ triviaal is.

Variant op het laatste deel van het bewijs: de fundamentaalgroep van een samentrekbare ruimte is triviaal.