Topologie, voorjaar 2016

Opgavenblad 1

2 februari

In de onderstaande opgaven beschouwen we $\mathbf{R}^n$, tenzij anders aangegeven, als metrische ruimte met behulp van de euclidische metriek

$$d(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \cdots + (x_n-y_n)^2}.$$

1. Ga van de volgende deelverzamelingen van $\mathbf{R}$ na of ze open en of ze gesloten zijn.

(a) $\emptyset$;

(b) $\mathbf{R}$;

(c) $(0,\infty)$;

(d) $[0,\infty)$;

(e) (a,b) met $a,b \in \mathbf{R}$ en $a < b$;

(f) $[a,b]$ met $a,b \in \mathbf{R}$ en $a < b$;

(g) $(a,b]$ met $a,b \in \mathbf{R}$ en $a < b$;

(h) $\mathbf{Z}$;

(i) $\mathbf{Q}$;

(j) $\{n^{-1} \mid n \in \mathbf{Z}, n > 0\}$.

2. Ga van de volgende deelverzamelingen van $\mathbf{R}^2$ na of ze open en of ze gesloten zijn.

(a) $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > 0\}$;

(b) $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x < 0, y \geq 0\}$;

(c) $\{(x,x) \mid x \in \mathbf{R}\}$;

(d) $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid y \geq x^2\}$;

(e) $\mathbf{Z}^2$;

(f) $\{(x, \sin(1/x)) \mid x > 0\}$.

3. In deze opgave laten we zien dat $\emptyset$ en $\mathbf{R}$ de enige deelverzamelingen van $\mathbf{R}$ zijn die (met betrekking tot de euclidische metriek) zowel open als gesloten zijn.

(a) Neem aan dat $U \subseteq \mathbf{R}$ zowel open als gesloten is. Laat (met behulp van de ϵ-δ-definitie) zien dat de functie

$$\begin{aligned} f\colon \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 1 & \text{als } x \in U, \\ 0 & \text{als } x \notin U \end{cases} \end{aligned}$$

continu is.

(b) Laat met behulp van de tussenwaardestelling zien dat geldt $U \in \{\emptyset, \mathbf{R}\}$.

4. Geef een oneindige collectie $\mathcal{U}$ van open deelverzamelingen van $\mathbf{R}$ zodanig dat $\bigcap_{U\in\mathcal{U}} U$ géén open deelverzameling van $\mathbf{R}$ is.

5. (Runde, 2.1.1.) Zij S een verzameling, en zij X de verzameling van alle eindige deelverzamelingen van S. Voor $A, B \in X$ definiëren we het symmetrisch verschil $A \triangle B$ als

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Laat zien dat de functie

$$\begin{aligned} d\colon X \times X &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (A, B) &\longmapsto \#(A \triangle B) \end{aligned}$$

een metriek op X is. (We schrijven $\#E$ voor de kardinaliteit van een eindige verzameling E.)

6. Een metriek d op een verzameling F heet een *Franse-spoorwegmetriek* als er een $p \in F$ bestaat zodanig dat voor alle $x, y \in F$ geldt

$$x \neq y \implies d(x, y) = d(x, p) + d(p, y).$$

Stel dat er twee verschillende punten $p, q \in F$ bestaan met de bovenstaande eigenschap. Bewijs dat $F = \{p, q\}$.

7. Zij (X, d) een metrische ruimte. De *diameter* van een niet-lege deelverzameling $S \subseteq X$ is gedefinieerd als

$$\operatorname{diam}(S) = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in S\} \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}.$$

Bekijk een keten van deelverzamelingen $S_0 \supseteq S_1 \supseteq S_2 \supseteq \cdots$ van X zodanig dat

$$\operatorname{diam}(S_n) \to 0 \quad \text{als } n \to \infty.$$

Bewijs dat $\bigcap_{n=0}^{\infty} S_n$ ten hoogste één punt bevat.

8. (Runde, 2.2.1.) Zij (X, d) een metrische ruimte. Laat zien dat elke eindige deelverzameling van X gesloten is.

9. Een metrische ruimte (X, d) heet *discreet* als er voor elke $x \in X$ een $\epsilon > 0$ bestaat zodanig dat $B_\epsilon(x) = \{x\}$. Bewijs dat elke eindige metrische ruimte (d.w.z. elke metrische ruimte (X, d) zodanig dat X een eindige verzameling is) discreet is.

10. (Runde, 2.2.6.) Zij (X, d) een metrische ruimte, en zij Y een deelverzameling van X. Bewijs dat een deelverzameling $U \subseteq Y$ open is in de metrische ruimte $(Y, d|_{Y \times Y})$ dan en slechts dan als er een open deelverzameling V van (X, d) bestaat zodanig dat $U = Y \cap V$.

11. Zij $\mathbf{S}^1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ de eenheidscirkel in $\mathbf{R}^2$. Gegeven twee punten $x = (x_1, x_2)$ en $y = (y_1, y_2)$ in $\mathbf{S}^1$ definiëren we $\theta(x, y) \in [0, \pi]$ als de (ongerichte) hoek tussen x en y gezien als vectoren, dus

$$\cos\theta(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2.$$

Bewijs dat θ een metriek op $\mathbf{S}^1$ is.

12. Zij p een priemgetal. Voor $x \in \mathbf{Q}^\times$ definiëren we

$$\operatorname{ord}_p(x) = n \quad \text{als } x = p^n \frac{a}{b} \text{ met } a, b \in \mathbf{Z} \setminus p\mathbf{Z}$$

en voor $x \in \mathbf{Q}$ definiëren we de *p-adische absolute waarde* van x als

$$|x|_p = \begin{cases} 0 & \text{als } x = 0, \\ p^{-\operatorname{ord}_p(x)} & \text{als } x \neq 0. \end{cases}$$

(a) Laat zien dat $|\ |_p$ voldoet aan de *sterke driehoeksongelijkheid*: voor alle $x, y \in \mathbf{Q}$ geldt

$$|x + y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}.$$

(b) Laat zien dat de functie

$$\begin{aligned} d_p \colon \mathbf{Q} \times \mathbf{Q} &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (x, y) &\longmapsto |x - y|_p \end{aligned}$$

een metriek op $\mathbf{Q}$ is.

13. (Runde, 2.1.3.) Zij S een niet-lege verzameling.

(a) Zij (Y, d) een metrische ruimte. Een functie $f \colon S \to Y$ heet *begrensd* als er een $M > 0$ bestaat zodanig dat voor alle $x, y \in S$ geldt $d(f(x), f(y)) < M$. Zij $B(S, Y)$ de verzameling van begrensde functies $S \to Y$. Voor $f, g \in B(S, Y)$ definiëren we

$$D(f, g) = \sup_{x \in S} d(f(x), g(x)).$$

Laat zien dat D een metriek op $B(S, Y)$ is.

(b) Zij E een reële vectorruimte voorzien van een norm $\|\ \|$. Voor $f \in B(S, E)$ definiëren we

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in S} \|f(x)\|.$$

Laat zien dat $\|\ \|_\infty$ een norm op $B(S, E)$ is. Wat is het verband met (a)?

14. Bekijk op $V = \mathbf{R}^2$ de euclidische norm

$$\begin{aligned} \|\ \|_{\mathrm{E}} \colon V &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (x_1, x_2) &\longmapsto \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \end{aligned}$$

en de Manhattannorm

$$\begin{aligned} \|\ \|_{\mathrm{M}} \colon V &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (x_1, x_2) &\longmapsto |x_1| + |x_2|. \end{aligned}$$

We schrijven d_{E} en d_{M} voor de door deze normen gedefinieerde metrieken op V, en voor $x \in V$ en $\epsilon > 0$ definiëren we

$$B_\epsilon^{\mathrm{E}}(x) = \{y \in V \mid d_{\mathrm{E}}(x, y) < \epsilon\}$$

en

$$B_\epsilon^{\mathrm{M}}(x) = \{y \in V \mid d_{\mathrm{M}}(x, y) < \epsilon\}.$$

(a) Laat zien dat voor alle $x \in V$ geldt

$$\|x\|_{\mathrm{E}} \leq \|x\|_{\mathrm{M}} \leq \sqrt{2}\|x\|_{\mathrm{E}}.$$

(b) Zij $x \in V$ en zij $\epsilon > 0$. Bewijs dat er een $\delta > 0$ bestaat waarvoor geldt $B^{\mathrm{E}}_{\delta}(x) \subseteq B^{\mathrm{M}}_{\epsilon}(x)$.

(c) Bewijs omgekeerd dat er voor alle $x \in V$ en $\epsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat waarvoor geldt $B^{\mathrm{M}}_{\delta}(x) \subseteq B^{\mathrm{E}}_{\epsilon}(x)$.

(d) Leid hieruit af dat een deelverzameling $Y \subseteq V$ open is in (V, d_{E}) dan en slechts dan als Y open is in (V, d_{M}).

15. (Runde, voorbeeld 2.1.2(f).) Zij (X, d) een metrische ruimte. Bekijk de functie

$$\begin{aligned} \tilde{d}\colon X \times X &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (x, y) &\longmapsto \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}. \end{aligned}$$

(a) Bewijs dat $\tilde{d}$ een metriek op X is die voldoet aan $\tilde{d}(x, y) < 1$ voor alle $x, y \in X$.

(b) Bewijs dat een deelverzameling $Y \subseteq X$ open is in (X, d) dan en slechts dan als Y open is in $(X, \tilde{d})$.

16. Zijn (X, d) en (X', d') twee metrische ruimten. Een *isometrie* van (X, d) naar (X', d') is een afbeelding $f\colon X \to X'$ zodanig dat voor alle $x, y \in X$ geldt $d'(f(x), f(y)) = d(x, y)$.

(a) Laat zien dat elke isometrie injectief is.

(b) Zij X een verzameling van drie elementen met de metriek

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{als } x = y, \\ 1 & \text{als } x \neq y. \end{cases}$$

Geef een isometrie $X \to \mathbf{R}^2$, en bewijs dat er geen isometrie $X \to \mathbf{R}$ bestaat.

(c) Bepaal alle isometrieën $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

17. Zij d de euclidische metriek op $\mathbf{R}$, en zij $\tilde{d}$ de metriek uit opgave 15.

(a) Bestaat er een isometrie $(\mathbf{R}, d) \to (\mathbf{R}, \tilde{d})$?

(b) Bestaat er een isometrie $(\mathbf{R}, \tilde{d}) \to (\mathbf{R}, d)$?

18. Zij (X, d) een metrische ruimte. We zeggen dat (X, d) *begrensd* is als er een $M > 0$ bestaat zodanig dat $d(x, y) < M$ voor alle $x, y \in X$. We zeggen dat (X, d) *totaal begrensd* is als er voor elke $\epsilon > 0$ eindig veel punten $x_1, \ldots, x_n$ in X bestaan met $\bigcup_{i=1}^{n} B_{\epsilon}(x_i) = X$.

(a) Bewijs dat elke totaal begrensde metrische ruimte begrensd is.

Bepaal voor elk van de volgende metrische ruimten of ze (totaal) begrensd zijn.

(b) $\mathbf{R}$;

(c) (a, b) met $a < b$ in $\mathbf{R}$;

(d) $[a, b]$ met $a < b$ in $\mathbf{R}$;

(e) $(\mathbf{R}, \tilde{d})$ met $\tilde{d}$ de metriek uit opgave 15;

(f) $\mathbf{Z}$ met $d(x, y) = 0$ (resp. 1) voor $x = y$ (resp. $x \neq y$).