Topologie, voorjaar 2016

Opgavenblad 11

26 april

1. (Runde, 5.2.1.) Beschouw de eenheidscirkel S^1 als de deelruimte $\{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}$. Zij n een positief geheel getal. Laat zien dat de afbeelding

$$\begin{aligned} f_n\colon S^1 &\longrightarrow S^1 \\ z &\longmapsto z^n \end{aligned}$$

een overdekkingsafbeelding is.

2. Zij $f\colon X \to Y$ een continue afbeelding van topologische ruimten, zij $x \in X$, en zij $y = f(x)$.

(a) Bewijs dat er een uniek groepshomomorfisme

$$f_*\colon \pi_1(X, x) \longrightarrow \pi_1(Y, y)$$

bestaat zodanig dat $f_*([\gamma]) = [f \circ \gamma]$ voor alle $\gamma \in P(X; x)$.

(b) Zij $g\colon Y \to Z$ een tweede continue afbeelding, en zij $z = g(y)$. Bewijs dat de afbeeldingen

$$f_*\colon \pi_1(X, x) \longrightarrow \pi_1(Y, y), \quad g_*\colon \pi_1(Y, y) \longrightarrow \pi_1(Z, z),$$
$$(g \circ f)_*\colon \pi_1(X, x) \longrightarrow \pi_1(Z, z)$$

voldoen aan $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

3. Zijn X en Y topologische ruimten, en zijn $x \in X$ en $y \in Y$.

(a) Construeer een groepsisomorfisme van $\pi_1(X \times Y, (x, y))$ naar $\pi_1(X, x) \times \pi_1(Y, y)$. (*Hint:* gebruik de vorige opgave om een groepshomomorfisme te construeren, en laat vervolgens zien dat dit een inverse heeft.)

(b) Concludeer dat de fundamentaalgroep van $S^1 \times S^1$ isomorf is met $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$.

4. (Runde, 5.2.2.) Zijn X en S topologische ruimten met S discreet en niet leeg. We definiëren een continue afbeelding $p\colon X \times S \to X$ door $p(x, s) = x$. Bewijs dat p een overdekkingsafbeelding is.

5. Zij $f\colon Y \to X$ een continue afbeelding. Bewijs dat de volgende uitspraken equivalent zijn:

(1) f is een overdekkingsafbeelding;

(2) voor elke $x \in X$ is er een open omgeving U van x in X zodanig dat $f|_V\colon V \to U$ een overdekkingsafbeelding is, waarbij $V = f^{-1}U$.

6. (vgl. Runde, 5.2.3.) Zij $f\colon Y \to X$ een overdekkingsafbeelding zodanig dat voor elke $x \in X$ de verzameling $f^{-1}\{x\}$ eindig is. We definiëren een functie $d\colon X \to \mathbf{Z}$ door $d(x) = \#(f^{-1}\{x\})$.

(a) Zij $x \in X$. Bewijs dat er een open omgeving U van x in X bestaat zodanig dat voor alle $x' \in U$ geldt $d(x') = d(x)$.

(b) Laat zien dat voor elke $n \in \mathbf{Z}$ de verzameling $\{x \in X \mid d(x) = n\}$ zowel open als gesloten is.

(c) Stel dat X samenhangend is. Laat zien dat de functie $d\colon X \to \mathbf{Z}$ constant is.

7. Zij $f\colon Y \to X$ een overdekkingsafbeelding. Bewijs dat Y een Hausdorffruimte is dan en slechts dan als X een Hausdorffruimte is.

Een topologische ruimte X heet *samentrekbaar* als er een $x_0 \in X$ bestaat zodanig dat de constante afbeelding $f_0\colon X \to X$ met beeld x_0 homotoop is met de identiteit op X.

8. Zij X een samentrekbare topologische ruimte.

(a) Laat zien dat X wegsamenhangend is.

(b) Laat zien dat $\pi_1(X, x)$ voor elke $x \in X$ de triviale groep is. (*Hint:* reduceer naar het geval $x = x_0$ met x_0 als in de definitie van samentrekbaarheid.)

9. We bekijken we de eenheidsbol

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

voorzien van het basispunt $x_0 = (0, 0, 1)$.

(a) Laat zien dat S^2 wegsamenhangend is.

(b) Zij $p \in S^2$. Laat zien dat $S^2 \setminus \{p\}$ samentrekbaar is. (*Hint:* reduceer naar een situatie waarin p "makkelijke" coördinaten heeft.)

(c) Zij $\gamma \in P(S^2; x_0)$ een lus met basispunt x_0. Neem aan dat γ niet surjectief is. Bewijs dat γ weghomotoop is met de constante lus met beeld $\{x_0\}$.

10. In deze opgave bewijzen we dat S^2 enkelvoudig samenhangend is.

(a) Zijn $x_1, x_2 \in S^2$, en zij $\gamma \in P(S^2; x_1, x_2)$ een weg. Zij $p \in S^2 \setminus \{x_1, x_2\}$. Stel dat γ niet surjectief is. Bewijs dat γ weghomotoop is met een weg die niet door p gaat. (*Hint:* gebruik de vorige opgave.)

(b) Zijn $x_1, x_2 \in S^2$, en zij $\gamma \in P(S^2; x_1, x_2)$ een weg. Bewijs dat γ weghomotoop is met een niet-surjectieve weg. (*Hint*: gebruik het onderstaande feit met een geschikte open overdekking van S^2, en pas (a) toe op de "deelwegen" $\gamma\colon [t_{j-1}, t] \to S^2$, met $p \in S^2 \setminus \{\gamma(t_0), \gamma(t_1), \ldots, \gamma(t_n)\}$.)

(c) Bewijs dat elke lus in S^2 met basispunt x_0 weghomotoop is met de constante lus met beeld x_0. (*Hint:* gebruik (b) en de vorige opgave.)

(d) Concludeer dat S^2 enkelvoudig samenhangend is.

Feit (in het college bewezen). Zij X een topologische ruimte, zij $\gamma\colon [0, 1] \to X$ een weg en zij $\mathcal{U}$ een open overdekking van X. Dan bestaan er $t_0, t_1, \ldots, t_n \in [0, 1]$ met $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ en open verzamelingen $U_1, U_2, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$ zodanig dat voor alle $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ geldt $\gamma([t_{j-1}, t_j]) \subseteq U_j$.

11. Zij X de "∞-vormige" deelruimte van $\mathbf{R}^2$ gedefinieerd door

$$X = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x - 1)^2 + y^2 = 1 \text{ of } (x + 1)^2 + y^2 = 1\},$$

voorzien van het basispunt $x_0 = (0, 0)$. We bekijken de lussen $\gamma_1, \gamma_{-1} \in P(X; x_0)$ met basispunt x_0 gedefinieerd door

$$\gamma_1(s) = (1 - \cos(2\pi s), \sin(2\pi s)),$$
$$\gamma_{-1}(s) = (\cos(2\pi s) - 1, \sin(2\pi s)).$$

(a) Laat zien dat er een overdekkingsafbeelding $p\colon Y \to X$ en een $y \in Y_0$ bestaan zodanig dat de lifts van $\gamma_1 \odot \gamma_{-1}$ en $\gamma_{-1} \odot \gamma_1$ naar Y met beginpunt y_0 verschillende eindpunten hebben. (*Hint:* dit is mogelijk met een $p\colon Y \to X$ zodanig dat $p^{-1}\{x\}$ uit drie punten bestaat voor elke $x \in X$.)

(b) Leid uit (a) af dat de fundamentaalgroep $\pi_1(X, x_0)$ niet abels is.