Topologie, voorjaar 2016

Opgavenblad 12

3 mei

1. Zij $p\colon Y \to X$ een overdekkingsafbeelding, en zij $y \in Y$. Bewijs dat de afbeelding $p_*\colon \pi_1(Y,y) \to \pi_1(X,p(y))$ injectief is.

2. Zij n een positief geheel getal.

(a) Zij $B^n = \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbf{R}^n \mid x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 < 1\}$ de open eenheidsbal in $\mathbf{R}^n$. Beschrijf een continue afbeelding $B^n \to B^n$ zonder dekpunten.

(b) Zij $S^n = \{(x_0,\ldots,x_n) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$ de n-dimensionale eenheidsbol. Beschrijf een continue afbeelding $S^n \to S^n$ zonder dekpunten.

3. Zij $D^1 = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 \leq 1\}$. Bewijs dat elke continue afbeelding $f\colon D^1 \to D^1$ een dekpunt heeft.

4. Zij $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ een continue afbeelding. Bewijs dat er $\lambda > 0$ en $x \in \mathbf{R}^2$ bestaan zodanig dat $f(x) = \lambda x$.

5. Beschouw de eenheidscirkel S^1 als de deelruimte $\{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}$. Bekijk voor $n \in \mathbf{Z}$ de afbeelding

$$\begin{aligned} f_n\colon S^1 &\longrightarrow S^1 \\ z &\longmapsto z^n. \end{aligned}$$

Hoe ziet het geïnduceerde groepshomomorfisme

$$(f_n)_*\colon \pi_1(S^1,1) \to \pi_1(S^1,1)$$

eruit onder de identificatie van $\pi_1(S^1,1)$ met $\mathbf{Z}$?

6. Zij X een topologische ruimte, zij Y een deelruimte van X, en zij $x \in X$. Zij $r\colon X \to Y$ een retractie van X op Y.

(a) Neem aan dat x in Y ligt. Laat zien dat de afbeelding $r_*\colon \pi_1(X,x) \to \pi_1(Y,r(x))$ surjectief is.

(b) Geldt de uitspraak in (a) ook zonder de aanname dat x in Y ligt? Geef een bewijs of een tegenvoorbeeld.

7. (a) Bekijk de deelruimten $Y \subset X \subset \mathbf{R}^2$ gedefinieerd door

$$\begin{aligned} X &= \mathbf{R}^2 \setminus \{(-1,0),(1,0)\}, \\ Y &= \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 = 1 \text{ of } (x+1)^2 + y^2 = 1\}. \end{aligned}$$

Laat zien dat de inclusie $i\colon Y \to X$ een homotopie-equivalentie is.

(b) Zijn $p,q,r \in \mathbf{R}^2$ drie verschillende punten. Bewijs dat de fundamentaalgroep $\pi_1(\mathbf{R}^2 \setminus \{q,r\},p)$ niet abels is. (*Hint:* gebruik opgave 11 van blad 11.)

8. (a) Gegeven zijn twee topologische ruimten X en Y en vier continue afbeeldingen $f,f'\colon X \to X$ en $g,g'\colon Y \to Y$ zodanig dat f homotoop is met f', en g met g'. We definiëren twee afbeeldingen $h,h'\colon X \times Y \longrightarrow X \times Y$ door $h(x,y) = (f(x),g(y))$ en $h'(x,y) = (f'(x),g'(y))$. Bewijs dat h en h' continu zijn en homotoop met elkaar zijn.

(b) Zijn X_1, X_2, Y_1 en Y_2 topologische ruimten zodanig dat X_1 homotopie-equivalent is met X_2, en Y_1 met Y_2. Bewijs dat $X_1 \times Y_1$ homotopie-equivalent is met $X_2 \times Y_2$.

9. Beschouw in $\mathbf{R}^3$ de cirkel C en de lijn Z gegeven door

$$C = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbf{R}, x^2 + y^2 = 1\},$$
$$Z = \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbf{R}\}.$$

Definieer $X = \mathbf{R}^3 \setminus (C \cup Z)$, en zij $x \in X$. Laat zien dat de fundamentaalgroep $\pi_1(X, x)$ isomorf is met $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$.

10. Zij $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ de eenheidsbol, en zij $\sim$ de relatie op S^2 gedefinieerd door

$$x \sim y \iff x = y \text{ of } x = -y.$$

(a) Laat zien dat $\sim$ een equivalentierelatie is.

Het *reële projectieve vlak* is de ruimte $P = S^2/{\sim}$ voorzien van de quotiënttopologie (zie opgave 7 van blad 5).

(b) Laat zien dat de quotiëntafbeelding $q\colon S^2 \to P$ een overdekkingsafbeelding is.

(c) Zij $p \in P$. Laat zien dat de fundamentaalgroep $\pi_1(P, p)$ orde 2 heeft.