Topologie, voorjaar 2016

Opgavenblad 2

9 februari

1. Bepaal voor elk van de gegeven verzamelingen X in de opgaven 1 en 2 van opgavenblad 1 het inwendige X°, de afsluiting $\bar{X}$ en de rand ∂X.

2. Zij $(a_n)_{n\geq 0}$ een rij reële getallen die convergeert naar $a \in \mathbf{R}$.

(a) Zij X een gesloten deelverzameling van $\mathbf{R}$ die alle a_n ($n \geq 0$) bevat. Laat zien dat $a \in X$.

(b) Zij $A = \{a_n \mid n \geq 0\}$. Laat zien dat $\bar{A} = A \cup \{a\}$ en $A^\circ = \emptyset$.

3. Geldt voor elke metrische ruimte (X, d), elke $x \in X$ en elke $\epsilon > 0$ dat de afsluiting van de open bal $B_\epsilon(x)$ gelijk is aan de gesloten bal $B_\epsilon[x] = \{y \in X \mid d(x, y) \leq \epsilon\}$? Geef een bewijs of een tegenvoorbeeld.

4. (Runde, 2.2.4 en 2.3.3.) Zij (X, d) een metrische ruimte, $S \subseteq X$ een niet-lege deelverzameling en $x \in X$. De *afstand van x tot S* is

$$\operatorname{dist}(x, S) = \inf\{d(x, y) \mid y \in S\}.$$

(a) Bewijs dat $\bar{S}$ de verzameling van alle $x \in X$ is waarvoor $\operatorname{dist}(x, S) = 0$.

(b) Bewijs dat de functie $X \to \mathbf{R}$ die x op $\operatorname{dist}(x, S)$ afbeeldt continu is.

5. Zij (X, d) een metrische ruimte, en zijn A en B deelverzamelingen van X. Geef voor elk van de volgende uitspraken een bewijs of een tegenvoorbeeld.

(a) $\overline{(\bar{A})} = \bar{A}$;

(b) $(A^\circ)^\circ = A^\circ$;

(c) $\partial(\partial A) = \partial A$;

(d) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$;

(e) $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cap \bar{B}$;

(f) $(A \cup B)^\circ = A^\circ \cup B^\circ$;

(g) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.

6. Zij (X, d) een metrische ruimte en S een deelverzameling van X. Bewijs dat S dicht ligt in X dan en slechts dan als voor elke $\epsilon > 0$ geldt $X = \bigcup_{s \in S} B_\epsilon(s)$.

7. Zijn (X, d_X) en (Y, d_Y) metrische ruimten en zij $a \in X$. Een afbeelding $f\colon X \to Y$ heet *continu in a* als er voor alle $\epsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zodanig dat voor alle $x \in X$ geldt $d_X(x, a) < \delta \implies d_Y(f(x), f(a)) < \epsilon$. Op $\mathbf{R}^n$ en $\mathbf{C}$ beschouwen we de euclidische metriek d_{E}, op $\mathbf{R}^2$ tevens de Manhattanmetriek d_{M}, en op $\mathbf{R}$ tevens de Franse-spoorwegmetriek d_{F} gedefinieerd door

$$d_{\mathrm{F}}(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{als } x = y, \\ |x| + |y| & \text{als } x \neq y. \end{cases}$$

Bepaal voor elk van de onderstaande afbeeldingen $f\colon X \to Y$ de verzameling van punten van X waar f continu is.

(a) $(\mathbf{Q}, d_{\mathrm{E}}) \to (\mathbf{C}, d_{\mathrm{E}}), \quad x \mapsto x;$

(b) $(\mathbf{R}^2, d_{\mathrm{E}}) \to (\mathbf{R}^2, d_{\mathrm{M}}), \quad x \mapsto x;$

(c) $(\mathbf{C}, d_{\mathrm{E}}) \to (\mathbf{C}, d_{\mathrm{E}}), \quad z \mapsto \begin{cases} (\exp(z)-1)/z & \text{als } z \neq 0, \\ 0 & \text{als } z = 0; \end{cases}$

(d) $(\mathbf{R}, d_{\mathrm{E}}) \to (\mathbf{R}, d_{\mathrm{F}}), \quad x \mapsto x;$

(e) $(\mathbf{R}, d_{\mathrm{E}}) \to (\mathbf{R}, d_{\mathrm{E}}), \quad x \mapsto \begin{cases} x & \text{als } x \in \mathbf{Q}, \\ -x & \text{als } x \notin \mathbf{Q}. \end{cases}$

(f) $(\mathbf{R}, d_{\mathrm{F}}) \to (\mathbf{R}, d_{\mathrm{E}}), \quad x \mapsto \begin{cases} x & \text{als } x \in \mathbf{Q}, \\ -x & \text{als } x \notin \mathbf{Q}. \end{cases}$

8. Zij p een priemgetal, zij $|\ \ |_p$ de p-adische absolute waarde op $\mathbf{Q}$ en zij $d_p(x,y) = |x-y|_p$ de p-adische metriek (zie opgave 12 van opgavenblad 1).

(a) Bewijs dat de rij $(1, p, p^2, p^3, \ldots)$ in $(\mathbf{Q}, d_p)$ naar 0 convergeert.

(b) Construeer een rij in $\mathbf{Q}$ die in $\mathbf{R}$ naar 0 convergeert en in $(\mathbf{Q}, d_2)$ naar 1.

9. (Runde, 2.3.4.) Zijn $(E, \|\ \ \|_E)$ en $(F, \|\ \ \|)_F)$ genormeerde $\mathbf{R}$-vectorruimten, en zij $T\colon E \to F$ een $\mathbf{R}$-lineaire afbeelding. Bewijs dat de volgende uitspraken equivalent zijn:

(1) T is continu;

(2) T is continu in 0;

(3) er bestaat een reëel getal C zodanig dat voor alle $x \in E$ geldt $\|T(x)\|_F \leq C\|x\|_E$.

10. Bewijs dat een samenstelling van twee continue afbeeldingen tussen metrische ruimten zelf ook continu is.

11. Zijn (X, d_X) en (Y, d_Y) twee metrische ruimten.

(a) Laat zien dat de functie

$$\begin{aligned} D\colon (X \times Y) \times (X \times Y) &\longrightarrow \mathbf{R} \\ ((x,y),(x',y')) &\longmapsto d_X(x,x') + d_Y(y,y'). \end{aligned}$$

een metriek op het product $X \times Y$ is. Wat is het verband met de Manhattanmetriek?

(b) Bewijs dat de projecties $X \times Y \to X$ en $X \times Y \to Y$ (gedefinieerd door $(x,y) \mapsto x$ respectievelijk $(x,y) \mapsto y$) continu zijn.

(c) Zij (T, d_T) een metrische ruimte. Gegeven twee afbeeldingen $f\colon T \to X$ en $g\colon T \to Y$ definiëren we de afbeelding

$$\begin{aligned} f \times g\colon T &\longrightarrow X \times Y \\ t &\longmapsto (f(t), g(t)). \end{aligned}$$

Laat zien dat $f \times g$ continu is dan en slechts dan als f en g beide continu zijn.

12. Zij N de verzameling $\{0,1,2,\ldots\} \cup \{\infty\}$. Construeer een metriek op N met de volgende eigenschap: een rij $(y_n)_{n\geq 0}$ in een metrische ruimte Y is convergent dan en slechts dan als er een continue afbeelding $f\colon N \to Y$ bestaat met $f(n) = y_n$ voor alle $n \in \{0,1,2,\ldots\}$.