

Opgavenblad 6

15 maart

1. Zijn X , Y , Z drie topologische ruimten, zijn $p: X \times Y \rightarrow X$ en $q: X \times Y \rightarrow Y$ de projectieafbeeldingen en zij $f: Z \rightarrow X \times Y$ een afbeelding. Laat zien dat f continu is dan en slechts dan als de samenstellingen

$$p \circ f: Z \rightarrow X, \quad q \circ f: Z \rightarrow Y$$

continu zijn.

2. Zij $X = \{0, 1\}$ met de discrete topologie, en zij $Y = \prod_{n=0}^{\infty} X$ (de verzameling van rijen in $\{0, 1\}$) voorzien van de producttopologie.

- (a) Voor $n \geq 0$ en $s_0, s_1, \dots, s_n \in \{0, 1\}$ definiëren we

$$B(s_0, \dots, s_n) = \{(x_i)_{i \geq 0} \in Y \mid x_0 = s_0, \dots, x_n = s_n\} \subseteq Y.$$

Laat zien dat deze verzamelingen $B(s_0, \dots, s_n)$ een basis voor de topologie op Y vormen.

- (b) Laat zien dat Y niet discreet is.

3. Zij $n \geq 0$.

- (a) Bewijs dat elke begrensde deelverzameling van $\mathbf{R}^n$ totaal begrensd is.
(b) In het college is bewezen dat voor een metrische ruimte X geldt: X is compact $\iff X$ is rijcompact $\iff X$ is volledig en totaal begrensd. Leid hieruit de stelling van Heine–Borel af: een deelverzameling $S \subseteq \mathbf{R}^n$ is (rij)compact dan en slechts dan als S gesloten en begrensd is.

4. Zij $X = \{0, 1, 2, \dots\}$, en zij d de unieke Franse-spoorwegmetriek op X met centrum 0 en $d(x, 0) = 1$ voor alle $x \neq 0$.

- (a) Laat zien dat de metrische ruimte (X, d) volledig is.
(b) Laat zien dat X begrensd is, maar niet totaal begrensd.
(c) Geef een rij in X zonder convergente deelrij.
(d) Geef een open overdekking van X zonder eindige deelooverdekking.
(e) Bepaal alle compacte deelverzamelingen van X .

5. (Runde, 2.5.2.) Zij (X, d) een metrische ruimte, en zij $(x_n)_{n \geq 0}$ een rij in X met limiet x . Laat zien dat $\{x_0, x_1, x_2, \dots\} \cup \{x\}$ compact is.

6. (Runde, 3.3.1.) Zij $(X, \mathcal{T})$ een topologische ruimte, en zijn $K_1, \dots, K_n$ compacte deelverzamelingen van X . Laat zien dat $K_1 \cup \dots \cup K_n$ compact is.

7. (Runde, 3.3.2.) Zij $(X, \mathcal{T})$ een topologische ruimte en zij $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ een basis voor $\mathcal{T}$. Laat zien dat X compact is dan en slechts dan als elke open overdekking $\mathcal{U}$ van X met $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{B}$ een eindige deelooverdekking heeft.

8. Zij X een Hausdorffruimte.
- (a) Zij A een compacte deelverzameling van X , en zij $z \in X \setminus A$. Bewijs dat er disjuncte open verzamelingen $U, V \subseteq X$ bestaan waarvoor geldt $A \subseteq U$ en $z \in V$.
 - (b) Zijn A en B twee disjuncte compacte deelverzamelingen van X . Bewijs dat er disjuncte open verzamelingen $U, V \subseteq X$ bestaan waarvoor geldt $A \subseteq U$ en $B \subseteq V$.
9. Zijn X en Y niet-lege topologische ruimten. Neem aan dat $X \times Y$ compact is. Bewijs dat X en Y compact zijn.
10. Zijn (X, d_X) en (Y, d_Y) metrische ruimten. Een afbeelding $f: X \rightarrow Y$ heet *uniform continu* als er voor alle $\epsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zodanig dat voor alle $a, b \in X$ geldt

$$d_X(a, b) < \delta \implies d_Y(f(a), f(b)) < \epsilon.$$

Neem aan dat X compact is. Bewijs dat elke continue afbeelding $f: X \rightarrow Y$ uniform continu is.