

Opgavenblad 7

22 maart

1. (Runde, 2.5.9.) Zij (K, d) een compacte metrische ruimte, en zij \mathcal{U} een open overdekking van K . Bewijs dat er een reëel getal $L > 0$ bestaat zodanig dat er voor elke niet-lege deelverzameling $S \subseteq K$ met $\text{diam}(S) < L$ een $U \in \mathcal{U}$ bestaat met $S \subseteq U$.
2. Zij $X = \{0, 1\}$ met de discrete topologie, en zij $Y = \prod_{n=0}^{\infty} X$ met de producttopologie. Gebruik de stelling van Tichonov om te bewijzen dat Y niet discreet is (vgl. opgave 2 van blad 6).
3. Zij (X, d) een metrische ruimte.
 - (a) Stel dat X lokaal compact en volledig is. Is X noodzakelijk compact? Geef een bewijs of een tegenvoorbeeld.
 - (b) Stel dat X lokaal compact en totaal begrensd is. Is X noodzakelijk compact? Geef een bewijs of een tegenvoorbeeld.
4. Zijn X en Y discrete topologische ruimten. Laat zien dat X en Y homeomorf zijn dan en slechts dan als X en Y dezelfde kardinaliteit hebben (als verzamelingen).
5. Construeer een homeomorfisme van het eenheidsvierkant

$$V = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid \max\{|x|, |y|\} = 1/2\}$$

naar de eenheidscirkel

$$C = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

6. Laat zien dat het open eenheidsinterval $(0, 1)$ en het gesloten eenheidsinterval $[0, 1]$ niet homeomorf zijn. (*Hint*: vind een topologische eigenschap die $[0, 1]$ wel heeft maar $(0, 1)$ niet.)

Zij (X, \mathcal{T}) een lokaal compacte Hausdorffruimte. Een *eenpuntscompactificatie* van (X, \mathcal{T}) is een compacte Hausdorffruimte $(X_{\infty}, \mathcal{T}_{\infty})$ samen met een continue afbeelding $\iota: X \rightarrow X_{\infty}$ zodanig dat $\iota: X \rightarrow \iota(X)$ een homeomorfisme is en $X_{\infty} \setminus \iota(X)$ uit één punt bestaat.

7. Zijn $(X_{\infty}, \mathcal{T}_{\infty})$ en $(X'_{\infty}, \mathcal{T}'_{\infty})$ twee eenpuntscompactificaties van (X, \mathcal{T}) met bijbehorende continue afbeeldingen $\iota: X \rightarrow X_{\infty}$ en $\iota': X \rightarrow X'_{\infty}$.
 - (a) Bewijs dat er een unieke bijectie $f: X_{\infty} \rightarrow X'_{\infty}$ bestaat waarvoor geldt $f \circ \iota = \iota'$.
 - (b) Bewijs dat $(X_{\infty}, \mathcal{T}_{\infty})$ en $(X'_{\infty}, \mathcal{T}'_{\infty})$ homeomorf zijn.
8. Zij \mathbf{R}_{∞} een eenpuntscompactificatie van \mathbf{R} . Laat zien dat \mathbf{R}_{∞} homeomorf is met de eenheidscirkel.
9. Zij X een *compacte* Hausdorffruimte. Beschrijf de eenpuntscompactificatie van X .