Topologie, voorjaar 2016

Opgavenblad 8

29 maart

1. In deze opgave bewijzen we dat $\mathbf{R}$ en $\mathbf{R}^2$ niet homeomorf zijn. Zij $P \in \mathbf{R}$ en $Q \in \mathbf{R}^2$.

(a) Laat zien dat $\mathbf{R} \setminus \{P\}$ niet samenhangend is.

(b) Laat zien dat $\mathbf{R}^2 \setminus \{Q\}$ wel samenhangend is.

(c) Concludeer dat $\mathbf{R} \setminus \{P\}$ en $\mathbf{R}^2 \setminus \{Q\}$ niet homeomorf zijn.

(d) Leid uit (c) af dat $\mathbf{R}$ en $\mathbf{R}^2$ niet homeomorf zijn.

2. Zij X een topologische ruimte, en zijn $\gamma_1, \gamma_2\colon [0,1] \to X$ continue afbeeldingen zodanig dat $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$. Bewijs dat de afbeelding

$$\begin{aligned} \gamma_1 \odot \gamma_2\colon [0,1] &\longrightarrow X \\ t &\longmapsto \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{als } 0 \le t \le 1/2, \\ \gamma_2(2t-1) & \text{als } 1/2 \le t \le 1 \end{cases} \end{aligned}$$

continu is. (Dit laat zien dat wegen aaneengeschakeld kunnen worden: als er een weg van x naar y en een weg van y naar z bestaan, dan bestaat er een weg van x naar z.)

3. Laat zien dat de volgende topologische ruimten wegsamenhangend zijn:

(a) de ruimte $X = \{p, q\}$ voorzien van de topologie $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{p\}, \{p, q\}\}$;

(b) de eenheidscirkel $S^1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$;

(c) de eenheidsbol $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

4. Zij X een topologische ruimte, en zijn $A, B \subseteq X$ wegsamenhangende deelverzamelingen zodanig dat $A \cap B$ niet-leeg is.

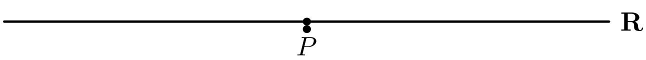
(a) Is $A \cap B$ noodzakelijk wegsamenhangend? Geef een bewijs of een tegenvoorbeeld.

(b) Is $A \cup B$ noodzakelijk wegsamenhangend? Geef een bewijs of een tegenvoorbeeld.

5. Zij X de verzameling $\mathbf{R} \cup \{P\}$ (met $P \notin \mathbf{R}$) voorzien van de topologie $\mathcal{T}$ waarvan een basis $\mathcal{B}$ gegeven wordt door

$$\begin{aligned} \mathcal{B} = \{U \mid U &\text{ is open in } \mathbf{R}\ \} \\ &\cup \{(U \setminus \{0\}) \cup \{P\} \mid U \text{ is een open omgeving van } 0 \text{ in } \mathbf{R}\}. \end{aligned}$$

Dit is een “lijn met een verdubbeld punt”:



(a) Laat zien dat X geen Hausdorffruimte is.

(b) Laat zien dat X wegsamenhangend is.

6. (Vgl. Runde, 3.4.2 en 3.4.4.) Zijn X en Y topologische ruimten.

(a) Bewijs dat $X \times Y$ wegsamenhangend is dan en slechts dan als X en Y het zijn.

(b) Bewijs dat $X \times Y$ samenhangend is dan en slechts dan als X en Y het zijn. (*Hint:* gebruik continue functies naar $\{0, 1\}$.)

7. Zij X een deelverzameling van $\mathbf{R}^n$. We zeggen dat X *convex* is als voor alle $x, y \in X$ het lijnsegment dat x en y verbindt in X bevat is, d.w.z. voor alle $t \in [0, 1]$ geldt

$$(1-t)x + ty \in X.$$

Zij $\mathcal{C}$ een collectie convexe deelverzamelingen van $\mathbf{R}^n$.

(a) Is $\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C$ noodzakelijk convex? Geef een bewijs of een tegenvoorbeeld.

(b) Is $\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$ noodzakelijk convex? Geef een bewijs of een tegenvoorbeeld.

8. Zij X een deelverzameling van $\mathbf{R}^n$. We zeggen dat X *stervormig* is als er een $x_0 \in X$ bestaat zodanig dat voor alle $x \in X$ en alle $t \in [0, 1]$ geldt

$$x_0 + t(x - x_0) \in X.$$

(a) Bewijs dat elke niet-lege convexe deelverzameling van $\mathbf{R}^n$ stervormig is.

(b) Geef een voorbeeld van een deelverzameling van $\mathbf{R}^2$ die wel stervormig, maar niet convex is.

(c) Laat zien dat elke stervormige deelruimte van $\mathbf{R}^n$ wegsamenhangend is.