HERTENTAMEN TOPOLOGIE

Dinsdag 17 april 2018, 14:00–17:00

Literatuur, aantekeningen en elektronische hulpmiddelen zijn niet toegestaan.

Geef volledige argumenten en geef duidelijk aan wat je gebruikt.

Het cijfer voor dit tentamen is $1 + (\text{aantal punten})/10$, waarbij het aantal punten de som van de punten voor alle opgaven is.

(12 pt) **1.** In $\mathbf{R}^2$ (met de euclidische metriek d) bekijken we de deelruimten

$$\begin{aligned} X &= \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid d((x, y), (1, 0)) \leq 2\}, \\ Y &= \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \notin \mathbf{Q} \text{ of } y \notin \mathbf{Q}\}, \\ Z &= \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \notin \mathbf{Z} \text{ en } y \notin \mathbf{Z}\}. \end{aligned}$$

Geef (zonder bewijs) voor elk van deze deelruimten aan welke van de volgende eigenschappen hij heeft: open, rijcompact, samenhangend, dicht in $\mathbf{R}^2$.

(14 pt) **2.** Zij $(V, \|\ \|)$ een Banachruimte, en zij d de metriek op V gedefinieerd door $\|\ \|$ (d.w.z. $d(x, y) = \|x - y\|$ voor alle $x, y \in V$). Zij $W \subseteq V$ een *lineaire* deelruimte, en zij $\|\ \|_W$ de beperking van $\|\ \|$ tot W. Bewijs dat $(W, \|\ \|_W)$ een Banachruimte is dan en slechts dan als W gesloten is in V met betrekking tot de metriek d.

(14 pt) **3.** Zij X een verzameling, en zijn $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ twee topologieën op X zodanig dat $\mathcal{T}'$ fijner is dan $\mathcal{T}$.

(a) Neem aan dat $(X, \mathcal{T}')$ compact is. Bewijs dat $(X, \mathcal{T})$ compact is.

(b) Neem aan dat $(X, \mathcal{T})$ een Hausdorffruimte is. Bewijs dat $(X, \mathcal{T}')$ een Hausdorffruimte is.

(12 pt) **4.** Zij $f\colon X \to Y$ een continue afbeelding tussen topologische ruimten, en zijn $S \subseteq X$ en $T \subseteq Y$ twee deelverzamelingen zodanig dat $f(S)$ bevat is in T.

(a) Bewijs dat $f(\bar{S})$ bevat is in $\bar{T}$.

(b) Laat met een voorbeeld zien dat $f(S^\circ)$ niet noodzakelijk bevat is in T°.

(12 pt) **5.** Zijn X en Y twee wegsamenhangende topologische ruimten. Neem aan dat elk van de beide verzamelingen X en Y minstens twee elementen heeft. Zij $x \in X$ en $y \in Y$. Laat zien dat de topologische ruimte $(X \times Y) \setminus \{(x, y)\}$ wegsamenhangend is.

(14 pt) **6.** Zij $X = \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Bewijs dat de continue afbeeldingen $f, g\colon X \to X$ gedefinieerd door $f(x, y) = (x, y)$ en $g(x, y) = (-y, x)$ homotoop zijn.

(12 pt) **7.** Zij $p\colon Y \to X$ een overdekkingsafbeelding. Stel dat X enkelvoudig samenhangend is. Bewijs dat elke wegsamenhangscomponent van Y enkelvoudig samenhangend is.

Succes!