UITWERKING TENTAMEN TOPOLOGIE

Maandag 15 januari 2018, 14:00–17:00

(15 pt) **1.** De gegeven deelruimten hebben de volgende eigenschappen:

	X	Y	Z
begrensd	nee	nee	ja
gesloten	ja	nee	ja
compact	nee	nee	ja
samenhangend	ja	nee	nee
dicht in $\mathbf{R}$	nee	ja	nee

(18 pt) **2.** (a) Per definitie is $\| \ \|$ een norm dan en slechts dan als voor alle $c \in \mathbf{R}$ en $v, w \in V$ geldt

$$\|v\| \geq 0 \quad \text{met gelijkheid dan en slechts dan als } v = 0,$$
$$\|cv\| = |c|\|v\|,$$
$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|.$$

Zijn dus $c \in \mathbf{R}$ en $v = (v_1, v_2), w = (w_1, w_2) \in V$ willekeurig gegeven. Er geldt

$$\|v\| = \|v_1\|_1 + \|v_2\|_2 \geq 0 + 0 = 0$$

met gelijkheid dan en slechts dan als $v_1 = 0$ en $v_2 = 0$, oftewel dan en slechts dan als $v = 0$. Verder geldt

$$\begin{aligned}\|cv\| &= \|cv_1\|_1 + \|cv_2\|_2 \\ &= |c|\|v_1\|_1 + |c|\|v_2\|_2 \\ &= |c|\|v\|\end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned}\|v + w\| &= \|v_1 + w_1\|_1 + \|v_2 + w_2\|_2 \\ &\leq (\|v_1\|_1 + \|w_1\|_1) + (\|v_2\|_2 + \|w_2\|_2) \\ &= (\|v_1\|_1 + \|v_2\|_2) + (\|w_1\|_1 + \|w_2\|_2) \\ &= \|v\| + \|w\|,\end{aligned}$$

hetgeen we moesten bewijzen.

(b) Stel dat V_1 en V_2 volledig zijn; we moeten bewijzen dat V ook volledig is. Zij $(v^n)_{n\geq 0} = ((v_1^n, v_2^n))_{n\geq 0}$ een Cauchyrij in V. Zij $\epsilon > 0$; per aanname is er $N \geq 0$ zodanig dat voor alle $m, n \geq N$ geldt

$$\|v^m - v^n\| < \epsilon.$$

Door dit te herschrijven als

$$\|v_1^m - v_1^n\|_1 + \|v_2^m - v_2^n\|_2 < \epsilon$$

zien we dat voor alle $m, n \geq N$ geldt $\|v_1^m - v_1^n\|_1 < \epsilon$ en $\|v_2^m - v_2^n\|_2 < \epsilon$. We concluderen dat $(v_1^n)_{n\geq 0}$ en $(v_2^n)_{n\geq 0}$ Cauchyrijen in V_1 respectievelijk V_2 zijn. Omdat V_1 en V_2 volledig zijn, bestaan de limieten $v_1 = \lim_{n\to\infty} v_1^n \in V_1$ en $v_2 = \lim_{n\to\infty} v_2^n \in V_2$. We schrijven $v = (v_1, v_2)$. Zij $\epsilon > 0$ willekeurig. Dan is er $N_1 \geq 0$ zodanig dat voor alle $n \geq N_1$ geldt $\|v_1^n - v_1\|_1 < \epsilon/2$, en $N_2 \geq 0$ zodanig dat voor alle $n \geq N_2$ geldt $\|v_2^n - v_2\|_2 < \epsilon/2$. Zij $N = \max\{N_1, N_2\}$; dan geldt voor alle $n \geq N$ dat

$$\|v^n - v\| = \|v_1^n - v_1\|_1 + \|v_2^n - v_2\|_2 < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Dit laat zien dat $(v^n)_{n\geq 0}$ naar v convergeert.

(20 pt) **3.** (a) De complementen van de verzamelingen in $\mathcal{T}$ zijn de elementen van

$$\mathcal{F} = \{\mathbf{Z}\} \cup \{S \subset \mathbf{Z} \setminus \{0\} \mid S \text{ eindig}\}.$$

Zij $\mathcal{G}$ een willekeurige deelverzameling van $\mathcal{F}$. Dan geldt ofwel $\mathcal{G} \subseteq \{\mathbf{Z}\}$, ofwel bevat $\mathcal{G}$ een eindige deelverzameling $S \subset \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ als element. In het eerste geval geldt $\bigcap_{G \in \mathcal{G}} G = \mathbf{Z}$, in het tweede geval geldt $\bigcap_{G \in \mathcal{G}} G \subseteq S$. In beide gevallen volgt $\bigcap_{G \in \mathcal{G}} G \in \mathcal{G}$.
Zij nu $\mathcal{G}$ een eindige deelverzameling van $\mathcal{F}$. Dan geldt ofwel $\mathbf{Z} \in \mathcal{G}$, ofwel $\mathbf{Z} \notin \mathcal{G}$. In het eerste geval volgt $\bigcup_{G \in \mathcal{G}} G = \mathbf{Z}$; in het tweede geval is $\bigcup_{G \in \mathcal{G}} G$ een vereniging van eindig veel eindige deelverzamelingen van $\mathbf{Z} \setminus \{0\}$ en is dus opnieuw een eindige deelverzameling van $\mathbf{Z} \setminus \{0\}$.
Dit betekent dat $\mathcal{F}$ de eigenschappen van de collectie gesloten deelverzamelingen van een topologie heeft. We concluderen dat $\mathcal{T}$ een topologie is.

(b) We gaan bewijzen dat $(\mathbf{Z}, \mathcal{T})$ de eindige-doorsnijdingseigenschap heeft. De in (a) gedefinieerde verzameling $\mathcal{F}$ is de collectie gesloten deelverzamelingen van $(\mathbf{Z}, \mathcal{T})$. Zij $\mathcal{G}$ een deelverzameling van $\mathcal{F}$ zodanig dat $\bigcap_{G \in \mathcal{G}} G = \emptyset$; we moeten bewijzen dat er een eindige deelverzameling $\mathcal{G}' \subset \mathcal{G}$ bestaat met $\bigcap_{G \in \mathcal{G}'} G = \emptyset$. Om te beginnen heeft $\mathcal{G}$ minstens één eindige deelverzameling $S \subset \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ als element, anders was $\bigcap_{G \in \mathcal{G}}$ gelijk aan $\mathbf{Z}$. Voor elke $s \in S$ is er wegens $\bigcap_{G \in \mathcal{G}} G = \emptyset$ een $T_s \in \mathcal{G}$ waarvoor geldt $s \notin T_s$. Per constructie is $\mathcal{G}' = \{S\} \cup \{T_s \mid s \in S\}$ nu een eindige deelverzameling van $\mathcal{G}$ die voldoet aan $\bigcap_{G \in \mathcal{G}'} G = \emptyset$. Dit laat zien dat $(\mathbf{Z}, \mathcal{T})$ de eindige-doorsnijdingseigenschap heeft en dus compact is.

(18 pt) **4.** (a) Zij $q\colon X \to Q$ de quotiëntafbeelding. De topologie op Q is per definitie

$$\mathcal{T}_Q = \{U \subseteq Q \mid q^{-1}U \text{ is open in } X\}.$$

Voor elke deelverzameling $U \subseteq Q$ is $q^{-1}U$ open in X omdat X discreet is, dus U is open in Q. We concluderen dat Q discreet is.

(b) Als X samenhangend is, dan is Q ook samenhangend. De quotiëntafbeelding $q\colon X \to Q$ is namelijk surjectief en continu, en in het college is bewezen dat het beeld van een samenhangende ruimte onder een continue afbeelding eveneens samenhangend is.

(c) Zij $\sim$ de equivalentierelatie op $\mathbf{R}$ gedefinieerd door

$$x \sim y \iff (x \geq 0 \text{ en } y \geq 0) \text{ of } (x < 0 \text{ en } y < 0).$$

Het is eenvoudig na te gaan dat $\sim$ een equivalentierelatie is met twee equivalentieklassen, namelijk $(-\infty, 0)$ en $[0, \infty)$. De quotiëntverzameling is dus $Q = \{(-\infty, 0), [0, \infty)\}$. Door voor elk van de vier deelverzamelingen van Q na te gaan of het inverse beeld in $\mathbf{R}$ open is, zien we dat de open deelverzamelingen van Q precies $\emptyset$, Q en $\{(-\infty, 0)\}$ zijn. In het bijzonder hebben de twee punten van Q geen disjuncte open omgevingen, dus Q is geen Hausdorffruimte.

(15 pt) **5.** (a) Zij $\gamma\colon [0,1] \to \mathbf{Q}$ een weg. Het beeld van γ is samenhangend. Het is bekend dat $\mathbf{Q}$ totaal onsamenhangend is, dus dit beeld bestaat uit één punt. We concluderen dat γ constant is.

(b) Zij $F\colon [0,1] \times X \to \mathbf{Q}$ een homotopie van f naar g. Voor elke $x \in X$ is de afbeelding

$$\begin{aligned} \gamma_x\colon [0,1] &\longrightarrow \mathbf{Q} \\ t &\longmapsto F(t,x) \end{aligned}$$

een weg in $\mathbf{Q}$. Wegens (a) geldt nu

$$f(x) = F(0, x) = \gamma_x(0) = \gamma_x(1) = F(1, x) = g(x)$$

voor alle $x \in X$, en we concluderen dat f en g gelijk zijn.

(20 pt) **6.** (a) We merken allereerst op dat p continu is als samenstelling van de continue afbeeldingen $z \mapsto 2\pi i z$ en $z \mapsto e^z$. We bekijken de overdekking van $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ bestaande uit de open verzamelingen

$$\begin{aligned} U_1 &= \{x + iy \mid x > 0\}, \quad U_2 = \{x + iy \mid y > 0\}, \\ U_3 &= \{x + iy \mid x < 0\}, \quad U_4 = \{x + iy \mid y < 0\}. \end{aligned}$$

We bekijken eerst U_2. We beweren dat $p^{-1}U_2$ een disjuncte vereniging van deelverzamelingen V_n is, met $n \in \mathbf{Z}$, zodanig dat $p|_{V_n} \colon V_n \to U_2$ een homeomorfisme is. We gebruiken de identiteit

$$p(z) = e^{2\pi i z} = e^{2\pi i x} e^{-2\pi y} = (\cos(2\pi x) + i \sin(2\pi x)) e^{-2\pi y} \quad \text{voor } z = x + iy.$$

Wegens $e^{-2\pi y} > 0$ ligt $p(z)$ in U_2 precies wanneer $n < x < 1/2 + n$ voor een $n \in \mathbf{Z}$. Zij dus $V_n = \{x + iy \mid n < x < 1/2 + n\}$; dan is $p|_{V_n} \colon V_n \to U_2$ een continue afbeelding. Deze heeft een continue inverse, namelijk $z \mapsto n + \frac{1}{2\pi i} \operatorname{Log} z$, waarbij

$$\operatorname{Log} z = \log |z| + i\phi(z);$$

hier is $\phi(z)$ de hoek tussen de positieve x-as en het lijnstuk van 0 naar z, zodat

$$\phi(z) = \cos^{-1} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \in (0, \pi) \quad \text{voor } z = x + iy \text{ met } y > 0,$$

hetgeen een continue afbeelding $U_2 \to (0, \pi)$ is. We concluderen dat $p|_{V_n} \colon V_n \to U_2$ een homeomorfisme is. Een corresponderende uitspraak geldt voor de open verzamelingen U_1, U_3 en U_4; het bewijs gaat net zo (met geschikte keuzes voor $\phi(z)$). Het bewijs laat in het bijzonder zien dat p surjectief is. Hieruit volgt dat p een overdekkingsafbeelding is.

(b) Er geldt

$$Y = p^{-1}\{1\} = \{z \in \mathbf{C} \mid e^{2\pi i z} = 1\} = \mathbf{Z}.$$

Voor $n \in Y = \mathbf{Z}$ bekijken we de functie

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_n \colon [0, 1] &\to \mathbf{C} \\ s &\mapsto n + s. \end{aligned}$$

Dit is een continue afbeelding die voldoet aan

$$\tilde{\gamma}_n(0) = n$$

en

$$(p \circ \gamma_n)(s) = p(\tilde{\gamma}_n(s)) = e^{2\pi i (n+s)} = e^{2\pi i s} = \gamma(s).$$

Dit laat zien dat $\tilde{\gamma}_n$ de lift van γ met beginpunt n is.