HERTENTAMEN TOPOLOGIE

Donderdag 29 juni 2017, 10:00–13:00

Literatuur, aantekeningen en elektronische hulpmiddelen zijn niet toegestaan.

Geef volledige argumenten en geef duidelijk aan wat je gebruikt.

Let op: het cijfer voor dit tentamen is $1 + (\text{aantal punten})/10$, waarbij het aantal punten gebaseerd is op de **vier** opgaven waarvoor je de meeste punten hebt.

(15 pt) **1.** Gegeven zijn de volgende metrische deelruimten van $\mathbf{R}^2$ met de euclidische metriek d:

$$\begin{aligned} X &= \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid d((x,y),(0,0)) < 1\}, \\ Y &= \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 2 \le d((x,y),(0,0)) \le 3\}, \\ Z &= \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid d((x,y),(0,1)) = d((x,y),(0,-1))\}. \end{aligned}$$

Geef (zonder bewijs) voor elk van deze deelruimten aan welke van de volgende eigenschappen hij heeft: open, compact, enkelvoudig samenhangend.

(20 pt) **2.** Zij X een metrische ruimte, en zijn Y en Z twee metrische deelruimten van X. Geef voor elk van de volgende uitspraken een bewijs of een tegenvoorbeeld.

(a) Als Y en Z rijcompact zijn, dan is $Y \cup Z$ rijcompact.

(b) Als Y en Z wegsamenhangend zijn, dan is $Y \cup Z$ wegsamenhangend.

(c) Als Y en Z begrensd zijn, dan is $Y \cup Z$ begrensd.

(25 pt) **3.** Voor $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ schrijven we $U_{a,b} = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > a \text{ en } y > b\}$. Zij $\mathcal{T}$ de collectie van alle deelverzamelingen $U \subseteq \mathbf{R}^2$ zodanig dat U te schrijven is als (mogelijk oneindige) vereniging van verzamelingen van de vorm $U_{a,b}$ met $(a,b) \in \mathbf{R}^2$.

(a) Laat zien dat $\mathcal{T}$ een topologie op $\mathbf{R}^2$ is.

(b) Geef (met bewijs) aan of de topologische ruimte $(\mathbf{R}^2, \mathcal{T})$ compact is.

(c) Geef (met bewijs) aan of $(\mathbf{R}^2, \mathcal{T})$ een Hausdorffruimte is.

(25 pt) **4.** Zij $X = \mathbf{C} \setminus \{0\}$ met de gebruikelijke topologie.

(a) Zij $f\colon X \to X$ de continue afbeelding $z \mapsto -z$. Geef een homotopie tussen f en de identiteit op X.

Zij $x_0 = 1 \in X$, en zij $\pi_1(X, x_0)$ de fundamentaalgroep van X met basispunt x_0. Definieer een continue afbeelding $g\colon X \to X$ door $g(z) = z^2$; merk op dat $g(x_0) = x_0$.

(b) Zij $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ de klasse van de weg $\gamma\colon [0,1] \to X$ gegeven door $t \mapsto \exp(2\pi i t)$. Laat zien dat de elementen $g_*([\gamma])$ en $[\gamma] \cdot [\gamma]$ van $\pi_1(X, x_0)$ gelijk zijn.

(c) Leid uit (b) af dat g *niet* homotoop is met de identiteit op X.

(20 pt) **5.** (a) Definieer het begrip *overdekkingsafbeelding* tussen topologische ruimten.

(b) Zijn X en Y topologische ruimten, en zij $p\colon Y \to X$ een overdekkingsafbeelding. Zij S een topologische deelruimte van X, en zij T de deelruimte $p^{-1}S$ van Y. Bewijs dat $p|_T\colon T \to S$ (d.w.z. de beperking van p tot T, gezien als continue afbeelding van T naar S) een overdekkingsafbeelding is.

Succes!