TENTAMEN TOPOLOGIE

Maandag 14 januari 2019, 14:00–17:00

Literatuur, aantekeningen en elektronische hulpmiddelen zijn niet toegestaan.

Geef volledige argumenten en geef duidelijk aan wat je gebruikt.

Let op: het cijfer voor dit tentamen is $1+$(aantal punten)/10, waarbij het aantal punten gebaseerd is op de **vijf** opgaven waarvoor je de meeste punten hebt.

(15 pt) **1.** In $\mathbf{R}^2$ (met de euclidische metriek) bekijken we de deelruimten

$$X=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid xy>1\},\qquad Y=\{(\cos t,\cos(2t))\mid t\in\mathbf{R}\},$$
$$Z=\{(0,y)\mid -1\le y\le 1\}\cup\{(x,\sin(1/x))\mid x>0\}.$$

Geef (zonder bewijs) voor elk van deze deelruimten aan welke van de volgende eigenschappen hij heeft: open, gesloten, rijcompact, samenhangend, wegsamenhangend.

(16 pt) **2.** Zijn X en Y twee metrische ruimten, zij $f\colon X\to Y$ een continue afbeelding, en zij S een metrische deelruimte van X.

(a) Bewijs de inclusie $f(\overline{S})\subseteq\overline{f(S)}$; hier is $\overline{S}$ (resp. $\overline{f(S)}$) de afsluiting van S in X (resp. van $f(S)$ in Y).

(b) Laat met een voorbeeld zien dat in het algemeen niet geldt $f(\overline{S})=\overline{f(S)}$.

(20 pt) **3.** Zij $(V,\|\ \|)$ een genormeerde $\mathbf{R}$-vectorruimte, en zij $B=\{v\in V\mid \|v\|=1\}$ de “eenheidsbol” in V. We voorzien V en B van de metriek gedefinieerd door $\|\ \|$.

(a) Bewijs dat B gesloten is in V en dat B begrensd is.

(b) Stel dat $V=\mathbf{R}^n$ met $n\ge 0$ (maar $\|\ \|$ is niet noodzakelijk de euclidische norm). Laat zien dat B compact is. (*Hint:* alle normen op V zijn equivalent.)

(18 pt) **4.** Zijn X en Y twee topologische ruimten. Bewijs voor elk van de volgende eigenschappen $\mathcal{E}$ dat als X en Y de eigenschap $\mathcal{E}$ hebben, ook $X\times Y$ de eigenschap $\mathcal{E}$ heeft.

(a) discreet;

(b) totaal onsamenhangend;

(c) enkelvoudig samenhangend.

(16 pt) **5.** Zij X een topologische ruimte, en zij $f\colon X\to X$ een continue afbeelding. We bekijken verder de gesloten eenheidsschijf $D^2=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\mid x^2+y^2\le 1\}$.

(a) Stel dat X homeomorf is met D^2. Bewijs dat f een dekpunt (= vast punt) heeft.

(b) Geef (met onderbouwing) een voorbeeld van X en f als boven waar X homotopie-equivalent is met D^2, maar waar f geen dekpunt heeft.

(20 pt) **6.** Zij Y een topologische ruimte, en zij $f\colon Y\xrightarrow{\sim}Y$ een homeomorfisme. Neem aan dat geldt $f\circ f=\mathrm{id}_Y$, en dat elk punt $z\in Y$ een open omgeving V heeft waarvoor geldt $V\cap f(V)=\emptyset$. Zij $\sim$ de relatie op Y gegeven door $y\sim y' \iff y'\in\{y,f(y)\}$. Je mag zonder bewijs gebruiken dat $\sim$ een equivalentierelatie is. Zij $Q=Y/{\sim}$ de quotiëntruimte, en zij $q\colon Y\to Q$ de quotiëntafbeelding.

(a) Laat zien dat voor alle z en V als boven de deelverzameling $q(V)\subseteq Q$ open is.

(b) Laat zien dat q een overdekkingsafbeelding is.

(c) Stel dat Y enkelvoudig samenhangend is. Laat zien dat voor elke $x_0\in Q$ de fundamentaalgroep $\pi_1(Q,x_0)$ orde 2 heeft.

Succes!