HERTENTAMEN TOPOLOGIE

Maandag 22 maart 2021, 9:00–12:00

Voor dit tentamen mag je het dictaat, het boek *A Taste of Topology* van Runde en eventuele eigen aantekeningen gebruiken die betrekking hebben op het vak. Het gebruik van andere bronnen is niet toegestaan.

Tenzij anders aangegeven, heeft $\mathbf{R}^n$ de euclidische metriek en topologie.

Geef volledige argumenten en geef duidelijk aan wat je gebruikt. Je mag in je antwoorden verwijzen naar resultaten uit het dictaat, maar niet naar opgaven.

Schrijf voordat je het tentamen begint de volgende integriteitsverklaring bovenaan de eerste pagina van je uitwerkingen en onderteken deze:

> *Dit examen wordt door mij alleen gemaakt, zonder hulp van derden, en zonder gebruik van andere bronnen dan welke expliciet zijn toegestaan door de docent. Tevens heb ik de integriteitsverklaring gelezen en getekend.*

Algemene regels en inleverinstructies staan op Brightspace (Hertentamen → Tentamen-informatie Topologie (online/op locatie)).

Let op: het cijfer voor dit tentamen is $1 + (\text{aantal punten})/10$, waarbij het aantal punten gebaseerd is op **alle** vijf opgaven.

(*12 pt*) **1.** In $\mathbf{R}^2$ bekijken we de deelruimten

$$X = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \notin \mathbf{Q} \text{ of } y \notin \mathbf{Q}\},$$
$$Y = \{(t,t^2) \mid t \in \mathbf{R}\}, \qquad Z = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid \max\{|x|,|y|\} \leq 4\}.$$

Geef (zonder bewijs) voor elk van deze deelruimten aan welke van de volgende eigenschappen hij heeft: dicht in $\mathbf{R}^2$, rijcompact, convex, wegsamenhangend. (Voor de definitie van 'convex': zie opgave 10.9 in het dictaat.)

(*22 pt*) **2.** Zij $X = (0,1)$ met de gewone metriek, en zij $(x_n)_{n\geq 0}$ de rij in X gedefinieerd door $x_n = \frac{1}{n+2}$.

(a) Bewijs dat $(x_n)_{n\geq 0}$ een Cauchyrij is.

(b) Bewijs dat $(x_n)_{n\geq 0}$ niet convergent is in X.

(c) Geef een voorbeeld van een continue afbeelding $f\colon X \to \mathbf{R}$ zodanig dat $(f(x_n))_{n\geq 0}$ geen Cauchyrij is.

(*18 pt*) **3.** Zij X een topologische ruimte, en zijn $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}'$ twee topologieën op X met $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$ (dus $\mathcal{T}'$ is fijner dan of gelijk aan $\mathcal{T}$.) Neem aan dat $(X,\mathcal{T})$ een Hausdorffruimte is.

(a) Bewijs dat $(X,\mathcal{T}')$ een Hausdorffruimte is.

(b) Stel dat $(X,\mathcal{T}')$ bovendien compact is. Bewijs dat geldt $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$. (Aanwijzing: bekijk de afbeelding $(X,\mathcal{T}') \to (X,\mathcal{T})$ die de identiteit is op X.)

(*16 pt*) **4.** Zij X een topologische ruimte, zij $\sim$ een equivalentierelatie op X, en zij $Q = X/{\sim}$ de quotiëntruimte.

(a) Stel dat X discreet is. Bewijs dat Q discreet is.

(b) Stel dat X de triviale topologie heeft. Bewijs dat Q de triviale topologie heeft.

(*22 pt*) **5.** (a) Zij $f\colon [0,1] \to \mathbf{R}^2$ een continue afbeelding. Is het beeld van f (gezien als topologische ruimte met de deelruimtetopologie van $\mathbf{R}^2$) noodzakelijk samentrekbaar? Geef een bewijs of een tegenvoorbeeld.

(b) Bepaal (met onderbouwing) de fundamentaalgroep van de topologische ruimte

$$\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid z = x^2 + y^2 \text{ en } 1 \leq z \leq 2\}$$

met het basispunt $(1,0,1)$.

Succes!