

TENTAMEN TOPOLOGIE

Dinsdag 12 januari 2021, 9:00–12:00

Voor dit tentamen mag je het dictaat, het boek *A Taste of Topology* van Runde en eventuele eigen aantekeningen gebruiken die betrekking hebben op het vak. Het gebruik van andere bronnen is niet toegestaan.

Tenzij anders aangegeven, heeft $\mathbf{R}^n$ de euclidische metriek en topologie.

Geef volledige argumenten en geef duidelijk aan wat je gebruikt. Je mag in je antwoorden verwijzen naar resultaten uit het dictaat, maar niet naar opgaven.

Schrijf voordat je het tentamen begint de volgende integriteitsverklaring bovenaan de eerste pagina van je uitwerkingen en onderteken deze:

Dit examen wordt door mij alleen gemaakt, zonder hulp van derden, en zonder gebruik van andere bronnen dan welke expliciet zijn toegestaan door de docent. Tevens heb ik de integriteitsverklaring gelezen en getekend.

Algemene regels en inleverinstructies staan op Brightspace (Tentamen → Tentameninformatie Topologie (online/op locatie)).

Let op: het cijfer voor dit tentamen is $1 + (\text{aantal punten})/10$, waarbij het aantal punten gebaseerd is op **alle** vijf opgaven.

(12 pt) 1. In $\mathbf{R}^2$ bekijken we de deelruimten

$$X = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\},$$
$$Y = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 = 1 \text{ of } y = 0\}, \quad Z = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 < 1\}.$$

Geef (zonder bewijs) voor elk van deze deelruimten aan welke van de volgende eigenschappen hij heeft: gesloten, compact, stervormig, enkelvoudig samenhangend. (Voor de definitie van ‘stervormig’: zie opgave 10.10 in het dictaat.)

(20 pt) 2. Zij V de $\mathbf{R}$ -vectorruimte van continue functies $f: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ (met de gebruikelijke puntsgewijze optelling en scalaire vermenigvuldiging). We bekijken de afbeelding $\| \cdot \|: V \rightarrow \mathbf{R}$ gedefinieerd door $\|f\| = \int_0^1 |f(x)| dx$.

(a) Bewijs dat $\| \cdot \|$ een norm op V is. (Aanwijzing: de voorwaarde van continuïteit in de definitie van V is nodig.)

(b) Zij $(f_n)_{n \geq 0}$ de rij in V gegeven door $f_n(x) = x^n$. Bewijs dat $(f_n)_{n \geq 0}$ convergeert met betrekking tot (de metriek gedefinieerd door) $\| \cdot \|$, en bepaal de limiet.

(22 pt) 3. Zij $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ de verzameling natuurlijke getallen. Voor alle $n \in \mathbf{N}$ schrijven we $U_n = \{n, n+1, n+2, \dots\} \subseteq \mathbf{N}$. Zij $\mathcal{T}$ de collectie deelverzamelingen van $\mathbf{N}$ gegeven door $\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{U_n \mid n \in \mathbf{N}\}$.

(a) Laat zien dat $\mathcal{T}$ een topologie op $\mathbf{N}$ is.

(b) Laat zien dat de topologische ruimte $(\mathbf{N}, \mathcal{T})$ compact is.

(c) Laat zien dat $(\mathbf{N}, \mathcal{T})$ geen Hausdorffruimte is.

(16 pt) 4. Zij $f: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2$ een continue afbeelding.

(a) Bewijs dat f niet surjectief is.

(b) Zij Z het beeld van f , voorzien van de deelruimtetopologie van $\mathbf{R}^2$. Zij $\sim$ de equivalentierelatie op $[0, 1]$ gegeven door $x \sim y \iff f(x) = f(y)$, en zij $Q = [0, 1]/\sim$ de quotiëntruimte. Laat zien dat de afbeelding $g: Q \rightarrow Z$ die de equivalentieklasse van x naar $f(x)$ stuurt, een homeomorfisme is. (Je mag zonder bewijs gebruiken dat g goed gedefinieerd is en dat Z een Hausdorffruimte is.)

(20 pt) 5. (a) Bewijs dat elke wegsamenhangende deelruimte van $\mathbf{R}$ enkelvoudig samenhangend is.

(b) Bepaal (met onderbouwing) de fundamenteaalgroep van de topologische ruimte $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 0 < x^2 + y^2 < 2 \text{ en } z^2 < 3\}$ met het basispunt $(0, 1, 0)$.

Succes!