UITWERKING TENTAMEN TOPOLOGIE

Dinsdag 12 januari 2021, 9:00–12:00

(12 pt) **1.** De gegeven deelruimten hebben de volgende eigenschappen:

	X	Y	Z
gesloten	ja	ja	nee
compact	ja	nee	nee
stervormig	nee	nee	ja
enkelvoudig samenhangend	nee	ja	ja

(20 pt) **2.** (a) Voor alle $f \in V$ geldt $\|f\| = \int_0^1 |f(x)|\,dx \geq 0$. Stel $f \neq 0$, en kies $x \in [0,1]$ met $f(x) \neq 0$. Schrijf $a = |f(x)|$, dan geldt $a > 0$. Wegens continuïteit is er een $\epsilon > 0$ zodanig dat voor alle y in het interval $I = (x-\epsilon, x+\epsilon) \cap [0,1]$ geldt $|f(y) - f(x)| < a/2$, dus in het bijzonder $|f(y)| > a/2$. Zijn b en e het begin- en eindpunt van het interval I, dan geldt $b < e$ en

$$\begin{aligned} \|f\| &\geq \int_b^e |f(y)|\,dy \\ &\geq \int_b^e \frac{a}{2}\,dy \\ &= \frac{a}{2}(e-b) \\ &> 0. \end{aligned}$$

Zij nu $c \in \mathbf{R}$ en $f \in V$. Dan geldt

$$\begin{aligned} \|cf\| &= \int_0^1 |cf(x)|\,dx \\ &= |c| \int_0^1 |f(x)|\,dx \\ &= |c|\|f\|. \end{aligned}$$

Zijn tenslotte $f, g \in V$. Dan geldt

$$\begin{aligned} \|f+g\| &= \int_0^1 |f(x)+g(x)|\,dx \\ &\leq \int_0^1 (|f(x)| + |g(x)|)\,dx \\ &= \|f\| + \|g\|. \end{aligned}$$

We concluderen dat $\|\ \|$ een norm op V is.

(b) We beweren dat $(f_n)_{n\geq 0}$ naar $0 \in V$ convergeert. Voor alle $n \geq 0$ geldt namelijk

$$\begin{aligned} \|f_n - 0\| &= \int_0^1 (x^n - 0)\,dx \\ &= \frac{1}{n+1} x^{n+1}\big|_{x=0}^1 \\ &= \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

en dit convergeert naar 0 als $n \to \infty$. (Merk op dat de limiet dus niet gelijk is aan de puntsgewijze limiet; deze laatste is niet continu.)

(22 pt) **3.** (a) Per definitie zijn $\emptyset$ en $U_0 = \mathbf{N}$ elementen van $\mathcal{T}$. (Dit hoeft niet apart bewezen te worden indien het volgt uit de bewijzen van de volgende twee eigenschappen.)

Zij $\mathcal{U}$ een deelverzameling van $\mathcal{T}$. Als geldt $\mathcal{U} = \emptyset$ of $\mathcal{U} = \{\emptyset\}$, dan volgt $\bigcup_{U\in\mathcal{U}} U = \emptyset \in \mathcal{T}$. Anders is de verzameling $\{n \in \mathbf{N} \mid U_n \in \mathcal{U}\}$ niet-leeg en heeft dus een kleinste element, zeg m. Dan geldt $\bigcup_{U\in\mathcal{U}} U = U_m \in \mathcal{T}$. We concluderen dat elke vereniging van elementen van $\mathcal{T}$ een element van $\mathcal{T}$ is.

Om te bewijzen dat elke eindige doorsnede van elementen van $\mathcal{T}$ ook in $\mathcal{T}$ ligt, is het genoeg om te laten zien dat voor alle $U, V \in \mathcal{T}$ geldt $U \cap V \in \mathcal{T}$. Dit is duidelijk in het geval $U = \emptyset$ of $V = \emptyset$. Anders zijn er $m, n \in \mathbf{N}$ met $U = U_m$ en $V = U_n$, en geldt $U \cap V = U_{\max\{m,n\}} \in \mathcal{T}$.

(b) Zij $\mathcal{U}$ een open overdekking van $\mathbf{N}$. Uit de definitie van $\mathcal{T}$ volgt dat $U_0 = \mathbf{N}$ de enige open omgeving van 0 is, zodat U_0 een element van $\mathcal{U}$ moet zijn. Hieruit volgt dat $\{U_0\}$ een eindige deeloverdekking van $\mathcal{U}$ is. We concluderen dat $(\mathbf{N}, \mathcal{U})$ compact is.

(c) Het volstaat om te laten zien dat 0 en 1 in $\mathbf{N}$ geen disjuncte open omgevingen hebben. De enige open omgeving van 0 is echter $U_0 = \mathbf{N}$ (zie (b)), en deze bevat ook 1.

(16 pt) **4.** (a) Het beeld van een compacte ruimte onder een continue afbeelding is compact. Aangezien $[0, 1]$ compact is en $\mathbf{R}^2$ niet (deze feiten mogen bekend worden verondersteld), volgt dat het beeld van f niet gelijk is aan $\mathbf{R}^2$.

(b) Per constructie is g injectief en surjectief (voor $x, y \in [0, 1]$ met $f(x) = f(y)$ volgt dat de equivalentieklassen van x en y gelijk zijn), en dus bijectief. De afbeelding g is de afbeelding die optreedt in de definitie van quotiëntruimten. Wegens de universele eigenschap van het quotiënt is deze afbeelding continu. Verder is Q compact (als beeld van de compacte ruimte $[0, 1]$ onder een continue afbeelding) en Z een Hausdorffruimte (als deelruimte van $\mathbf{R}^2$; dit mag zonder bewijs worden aangenomen). In het college is bewezen (gevolg 9.13 in het dictaat) dat hieruit volgt dat g een homeomorfisme is.

(20 pt) **5.** (a) Zij X een wegsamenhangende deelruimte van $\mathbf{R}$. Dan is X niet-leeg en bevat dus een punt $x \in X$. Voor elke $y \in X$ bestaat er een weg in X van x naar y. Wegens de tussenwaardestelling volgt dat voor alle $y \in X$ met met $x \le y$ (resp. $y \le x$) het interval $[x, y]$ (resp. $[y, x]$) bevat is in X. Hieruit volgt dat de afbeelding

$$\begin{aligned} h\colon [0,1] \times X &\longrightarrow X \\ (t, y) &\longmapsto y + t(x - y) \end{aligned}$$

goed gedefinieerd is. Het is duidelijk dat h continu is. Door $t = 0$ en $t = 1$ in te vullen, zien we dat h een homotopie van id_X naar de constante afbeelding $y \mapsto x$ is. Dit betekent dat X samentrekbaar is. We hebben in het college gezien dat dit impliceert dat X enkelvoudig samenhangend is.

Alternatief bewijs: gegeven een lus $\gamma\colon [0, 1] \to X$ met basispunt x bekijken we de afbeelding

$$\begin{aligned} \Gamma\colon [0,1] \times [0,1] &\longrightarrow X \\ (t, s) &\longmapsto x + t(\gamma(s) - x). \end{aligned}$$

Deze afbeelding is continu, en is goed gedefinieerd wegens de tussenwaardestelling (zie boven). We zien dat Γ een weghomotopie is van de constante weg met basispunt x naar de weg γ. Hieruit volgt dat de fundamentaalgroep van X met basispunt x triviaal is.

(b) Deze ruimte is homotopie-equivalent met de ruimte

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 < x^2 + y^2 < 2\}$$

via de projectie op het (x, y)-vlak. Deze laatste ruimte is op zijn beurt homotopie-equivalent met S^1 via de afbeelding

$$(x, y) \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x, y).$$

Omdat een homotopie-equivalentie een isomorfisme van fundamentaalgroepen induceert, is de fundamentaalgroep van de gegeven ruimte isomorf met die van S^1 (met betrekking tot een willekeurig basispunt). In het college is bewezen dat deze isomorf is met $\mathbf{Z}$.