HERTENTAMEN TOPOLOGIE

Woensdag 26 januari 2022, 10:15–13:15

Voor dit tentamen mag je het dictaat, het boek *A Taste of Topology* van Runde en eventuele eigen aantekeningen gebruiken die betrekking hebben op het vak. Het gebruik van andere bronnen of elektronische hulpmiddelen is niet toegestaan.

Geef volledige argumenten en geef duidelijk aan wat je gebruikt. Je mag in je antwoorden verwijzen naar resultaten uit het dictaat, maar niet naar opgaven.

In alle opgaven heeft $\mathbf{R}^n$ (respectievelijk $\mathbf{C}$) de euclidische metriek en topologie.

Let op: het cijfer voor dit tentamen is $1 + (\text{aantal punten})/10$, waarbij het aantal punten gebaseerd is op de **vijf** opgaven waarvoor je de meeste punten hebt.

(*12 pt*) **1.** In $\mathbf{R}^2$ bekijken we de deelruimten

$$X = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid xy \in \mathbf{Q}\},$$
$$Y = \{(\cos t, \sin t) \mid t \in \mathbf{R}\},$$
$$Z = \mathbf{Z} \times \mathbf{Q}.$$

Geef (zonder bewijs) voor elk van deze deelruimten aan welke van de volgende eigenschappen hij heeft: gesloten, compact, dicht in $\mathbf{R}^2$, totaal onsamenhangend.

(*20 pt*) **2.** Zij $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ de verzameling natuurlijke getallen, en zij X de verzameling van alle functies $f\colon \mathbf{N} \to [0, 1]$. Bekijk de afbeelding

$$\begin{aligned} d\colon X \times X &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (f, g) &\longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} |f(n) - g(n)|. \end{aligned}$$

(a) Bewijs dat de som in de definitie van d convergeert en dat d een metriek op X is.

(b) Bewijs dat de metrische ruimte (X, d) begrensd is.

(c) Bewijs dat X (gezien als topologische ruimte met de topologie gedefinieerd door d) samentrekbaar is.

(*20 pt*) **3.** Zij X een topologische ruimte.

(a) Zijn S en T twee deelverzamelingen van X met $S \cap T = \emptyset$. Bewijs dat $\bar{S} \cap T^\circ = \emptyset$.

(b) Zijn S en T twee deelverzamelingen van X met $\bar{S} \cap T^\circ = \emptyset$. Geldt dan noodzakelijk $S \cap T = \emptyset$? Geef een bewijs of een tegenvoorbeeld.

(c) Neem aan dat elke afbeelding $X \to \{0, 1\}$ (waarbij $\{0, 1\}$ de discrete topologie heeft) continu is. Bewijs dat X discreet is. (*Aanwijzing:* je hoeft (a) en (b) niet te gebruiken.)

(*16 pt*) **4.** Zijn X en Y twee compacte Hausdorffruimten. Bewijs dat de disjuncte vereniging $X \sqcup Y$ eveneens een compacte Hausdorffruimte is.

(*16 pt*) **5.** Bepaal (met onderbouwing) de fundamentaalgroep van de topologische ruimte $X = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 < x^2 + y^2 < 3 \text{ en } x > 0\}$ met het basispunt $(1, 1)$.

(*18 pt*) **6.** Zijn X en Y twee topologische ruimten, en zij $p\colon Y \to X$ een overdekkingsafbeelding.

(a) Stel dat Y wegsamenhangend is. Bewijs dat X wegsamenhangend is.

(b) Stel dat X wegsamenhangend is. Is Y noodzakelijk wegsamenhangend? Geef een bewijs of een tegenvoorbeeld.

Succes!